evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

STŘEDNÍ ODBORNÁ ŠKOLA ELEKTROTECHNICKÁ
Centrum odborné přípravy

SOŠE COP

VÝRAZY, ROVNICE, SOUSTAVY ROVNIC

Identifikace projektu

Název a číslo globálního grantu	**Zvyšování kvality ve vzdělávání v Jihočeském kraji** **CZ.1.07/1.1.10**
Registrační číslo projektu	**CZ.1.07/1.1.10/01.0015**
Název projektu	**Inovace a vytvoření odborných učebních textů pro rozvoj klíčových kompetencí v návaznosti na rámcové vzdělávací programy**
Název příjemce podpory	**Střední odborná škola elektrotechnická, Centrum odborné přípravy Hluboká nad Vltavou**

Hluboká nad Vltavou 2011

Na zpracování učebního textu Výrazy, rovnice, soustavy rovnic se podíleli učitelé SOŠE, COP, Hluboká nad Vltavou:

Železná Hana

Kouřilová Blanka

Lád Ladislav

Obsah

1 Výrazy

S výrazy se setkáváme ve všech oblastech matematiky. Výrazy jsou matematické zápisy, ve kterých se objevují čísla, písmena, závorky, znaky a znaménka početních úkonů. Výrazy mohou mít různý tvar, např.: 3; 22; $2a$; $2x+3y$; $2m+\sqrt{b}$; $|x-2|$; $\frac{3z}{c}$; atd.

Výraz tedy je: každé číslo a každá proměnná;
součet, rozdíl, součin a podíl dvou výrazů;
odmocnina a absolutní hodnota výrazu.

Písmena ve výrazech mohou nabývat různých hodnot, nazýváme je **proměnné** a podle toho jaká čísla do daného výrazu za proměnné dosadíme, dostaneme **číselnou hodnotu** tohoto výrazu. Za proměnné můžeme zvolit jen taková čísla, po jejichž dosazení **má výraz smysl**.

Při jakýchkoliv úpravách matematických výrazů musí být splněny dvě základní podmínky algebry:
1. **nelze dělit nulou** (tedy ani ve jmenovateli zlomku nemůže být nula);
2. **v množině reálných čísel neexistuje odmocnina ze záporného čísla.**

Další výhodou užívání výrazů je vztah mezi výrazem a určitým matematickým zápisem. Výrazy umožňují nahradit slovní popis různých matematických postupů jednoduchým a přehledným zápisem, uplatňují se při popisu fyzikálních dějů, při řešení slovních úloh, apod. Např. slovní popis výpočtu obsahu *S* trojúhelníku se základnou *z* a výškou *v* zní takto: Obsah *S* trojúhelníku je roven polovičnímu součinu délky základny *z* a k ní příslušné výšky *v*. Matematický zápis je podstatně jednodušší: $S=\frac{1}{2}z\cdot v$.

Řešené úlohy

Příklad 1

Určete podmínky platnosti následujících výrazů:

a) $\frac{x}{1-y}$ podm.: $1-y\neq 0 \Rightarrow y\neq 1$

b) $\frac{2+a}{b}$ podm.: $b\neq 0$

c) $1-\sqrt{z}$ podm.: $z\geq 0$

d) $\sqrt{r-2}$ podm.: $r-2\geq 0 \Rightarrow r\geq 2$

Příklad 2

Nahraďte matematickým výrazem slovní popisy:

a) Polovina součtu druhých mocnin čísel r, s $\qquad \frac{1}{2}\left(r^2+s^2\right).$

b) Polovina druhé mocniny součtu čísel r, s $\qquad \frac{1}{2}(r+s)^2.$

c) Druhá mocnina polovičního součtu čísel r, s $\qquad \left[\frac{1}{2}(r+s)\right]^2.$

d) Trojnásobek součtu čísel r, s $\qquad 3(r+s).$

e) Druhá mocnina rozdílu čísel r, s $\qquad (r-s)^2.$

1.1 Početní operace s výrazy

Budeme se zabývat hlavně výrazy, ve kterých mají všechny proměnné přirozené mocnitele; takové výrazy nazýváme mnohočleny. Tento celek rozdělíme na početní operace sčítání a odčítání mnohočlenů a operaci násobení mnohočlenů.

1.1.1 Sčítání a odčítání mnohočlenů

Součet výrazů dostaneme tak, že sečteme členy se stejnými proměnnými a se stejnými mocniteli. Chceme- li mnohočlen odečíst, musíme přičíst mnohočlen k němu opačný. Opačné výrazy jsou takové výrazy, jejichž součet je roven nule**.** Poznáme je též podle opačných znamének.

Řešené úlohy

Příklad 3

Sečtěte výrazy:

a) $(15a+2b)+(13a-b)=15a+2b+13a-b=28a+b$

b) $(5x^2-2x+3)+(x^2+4)=5x^2-2x+3+x^2+4=6x^2-2x+7$

Příklad 4

Odečtěte výrazy:

a) $(15a+2b)-(13a-b)=15a+2b-13a+b=2a+3b$

b) $(5x^2-2x+3)-(x^2+4)=5x^2-2x+3-x^2-4=4x^2-3x-1$

1.1.2 Násobení mnohočlenů

a) **Jednočlenem**: Mnohočlenem násobíme jednočlenem, když tímto jednočlenem vynásobíme **každý člen** mnohočlenu.

Řešené úlohy

Příklad 5

Násobte výrazy:

a) $(7x^2+2y-3)\cdot 5x=35x^3+10xz-15x$

b) $6a^2b\cdot(5a-8b+2)=30a^3b-48a^2b^2+12a^2b$

c) $(-1)\cdot(x^2-3y^2)=-x^2+3y^2$

b) **Mnohočlenem**: Mnohočlenem násobíme mnohočlenem tak, že **každý člen jednoho** mnohočlenu vynásobíme **každým členem druhého** mnohočlenu.

Řešené úlohy

Příklad 6

Násobte výrazy:

a) $\left(5x^2-3x+1\right)\cdot\left(4x-1\right)=20x^3-5x^2-12x^2+3x+4x-1=20x^3-17x^2+7x-1$

1.2 Druhá mocnina dvojčlenu a rozdíl druhých mocnin

Vzorce pro druhou mocninu známe už ze základní školy.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Často se vyskytují tyto případy:

$(-a-b)^2=[(-1)\cdot(a+b)]^2=(-1)^2\cdot(a+b)^2=1\cdot(a+b)^2=(a+b)^2$

$(-a+b)^2=[(-1)\cdot(a-b)]^2=(-1)^2\cdot(a-b)^2=1\cdot(a-b)^2=(a-b)^2$

Vidíme, že druhé mocniny opačných výrazů se rovnají.

Srovnejme s druhými mocninami opačných čísel: $9^2=(-9)^2$. Druhé mocniny opačných výrazů se rovnají stejně jako druhé mocniny opačných čísel

POZOR!

$(a+b)^2\neq a^2+b^2$

$(a-b)^2\neq a^2-b^2$

PLATÍ! $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ tento vztah je to vzorec pro rozdíl druhých mocnin nebo-li vzorec pro rozdíl čtverců.

Řešené úlohy

Příklad 7

Vypočtete podle vzorců:

a) $(4x-1)^2 = 16x^2 - 8x + 1$

b) $(a^2+1)^2 = a^4 + 2a^2 + 1$

c) $(6a-2)(6a+2) = 36a^2 - 4$

1.3 Třetí mocnina dvojčlenu, rozdíl a součet třetích mocnin

Vzorce, které známe už ze základní školy, nyní doplníme o následující:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

POZOR!

Zatímco pro **součet druhých mocnin** žádný vzorec **neexistuje**, pro **součet třetích mocnin ano**.

Řešené úlohy

Příklad 8

Vypočtete podle vzorců:

a) $(4x-1)^3 = (4x)^3 - 3\cdot(4x)^2\cdot 1 + 3\cdot 4x\cdot 1^2 - 1^3 = 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$

b) $(a^2+1)^3 = (a^2)^3 + 3\cdot(a^2)^2\cdot 1 + 3\cdot a^2\cdot 1^2 + 1^3 = a^6 + 3a^4 + 3a^2 + 1$

1.4 Rozklad výrazů na součin

Někdy je nutné vyjádřit výrazy ve tvaru součinu, např. potřebujeme-li zkrátit zlomek (lomený výraz), říkáme o nich, že je **rozkládáme na součin**. Používáme při tom tyto způsoby: vytýkání před závorku;
rozklad podle vzorců.

1.4.1 Rozklad pomocí vytknutí před závorku

Při roznásobení součtu nebo rozdílu používáme distributivní zákon:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Je zřejmé, že toto pravidlo lze použít i v opačném směru $yx + xz = x \cdot (y + z)$. Jsou-li všechny členy výrazu násobky stejného činitele, pak tento činitel lze vytknout před závorku a tím celý výraz rozložit na součin.

POZOR! Vytýkáme-li před závorku celý člen výrazu, nezbude po něm číslo **0** ale **1.**

$$(m + mn) = m \cdot (1 + m)$$

Vytknutí znaménka minus, tedy vlastně vytknutí čísla (-1), „technicky způsobuje“, že se výraz uvnitř závorky změní na opačný:

$$x + y = (-1) \cdot (-x - y)$$

$$x - y = (-1) \cdot (-x + y) = (-1) \cdot (y - x)$$

Nejsme- li si jisti správností vytknutí, provedeme zkoušku roznásobením.

Nejde- li vytknout ze všech členů mnohočlenu stejný člen, použijeme postupné (stupňovité) vytýkání: $a^2 - ab - ac + bc = a \cdot (a - b) - c \cdot (a - b)$. Tento výraz je vlastně dvojčlen, ve kterém můžeme vytknout celý dvojčlen v závorce:

$$a \cdot (a - b) - c \cdot (a - b) = (a - b) \cdot (a - c).$$

Řešené úlohy

Příklad 9

Rozložte na součin:

a) $xy - 5y = y(x-5)$

b) $a^2 + ab + ac - ad = a(a+b+c-d)$

c) $12x - 24y + 6z = 6(2x - 4y + z)$

d) $ab + ax - cb - cx = a(b+x) - c(b+x) = (b+x)(a-c)$

1.4.2 Rozklad pomocí vzorců

Při rozkladu použijeme již známé vzorce:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$$

Zde je důležité poznat příslušný vzorec, najít „systém“ jak ho poznat, což představuje určité množství zkušeností se vzorci. Vhodným příkladem je například rozklad výrazu $x^2 + 10x + 25$, protože si lze snadno představit $25 = 5^2, 10 = 5 \cdot 2$, potom je na vzorci $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ vidět, že $a = x$ a $b = 5$. Dostáváme tak řešení

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2\cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x+5)^2$$

Ovšem často musíme oba způsoby rozkladu kombinovat, vhodně používáme toho, že druhé mocniny opačných výrazů se rovnají, apod. Praxi v tomto rozkladu je nutno získat vyřešením většího počtu příkladů.

Řešené úlohy

Příklad 10

Rozložte na součin:

a) $9x^2 - 18xy + y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = (3x - y)^2$

b) $49m^2 - 100 = (7m - 10)(7m + 10)$

c) $8a^2 + 40ab + 50b^2 = 2(4a^2 + 20ab + 25b^2) = 2\left[(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 5b + (5b)^2\right] = 2(2a + 5b)^2$

d) $(s^3 - 1) = (s - 1)(s^2 + s + 1)$

e) $8b^3 + 27 = (2b)^3 + 3^3 = (2b + 3)(4b^2 - 6b + 9)$

1.5 Lomené výrazy

Lomené výrazy jsou výrazy, které mají tvar zlomku, v jehož jmenovateli jsou jedna nebo i více proměnných. Např.: $\frac{2}{x}$; $\frac{x+5}{x-7}$; $\frac{m}{2m^2 - m + 5}$; $\frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$; $-\frac{1}{3a-1}$.

Početní výkony s lomenými výrazy musí mít stejná pravidla jako početní výkony se zlomky. Proto je vhodné zopakovat si počítání se zlomky.

Řešené úlohy

Příklad 11

Spočítejte:

a) $\frac{7}{8} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{15 - 2}{10} = \frac{7}{8} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{152}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{4 + 10 - 9}{12} = \frac{5}{12}$

c) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) : (-5) = \frac{3 - 2}{6} : (-5) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{30}$

Nyní si připomeneme určování podmínek, pro něž má lomený výraz smysl. Hodnota **jmenovatele se nesmí rovnat nule**, tj. pro všechny proměnné ve jmenovateli se výraz **nesmí** rovnat nule.

Řešené úlohy

Příklad 12

Rozhodněte za jakých podmínek mají dané výrazy smysl:

a) $\frac{2}{x}$ $\quad$ $x \neq 0$

b) $\frac{x+5}{x-7}$ $\quad$ $x-7 \neq 0 \Rightarrow x \neq 7$

c) $\frac{x^2-xy+y^2}{xy}$ $\quad$ $x, y \neq 0$

d) $-\frac{1}{3a+1}$ $\quad$ $3a+1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{3}$

1.5.1 Rozšiřování a krácení lomených výrazů

Při rozšiřování a krácení se lomený výraz nezmění, když jeho čitatele i jmenovatele vynásobíme nebo vydělíme **stejným nenulovým výrazem**. Když dělíme čitatele i jmenovatele lomeného výrazu stejným výrazem nebo číslem, mluvíme o krácení lomeného výrazu. Když násobíme čitatele i jmenovatele lomeného výrazu stejným výrazem nebo číslem, mluvíme o rozšiřování lomeného výrazu. Je přitom důležité si zapamatovat, že rovnost mezi daným a upraveným lomeným výrazem platí jen pro ty hodnoty proměnných, pro něž **mají smysl oba tyto výrazy.** Přitom si dáváme pozor na to, že stejně jako u zlomků i u lomených výrazů lze krátit jen tehdy, když v čitateli i jmenovateli je výraz ve tvaru součinu. Není-li v tomto tvaru, musíme ho získat vhodným rozkladem.

Řešené úlohy

Příklad 13

Zjednodušte lomené výrazy:

a) $\dfrac{7x^3}{21x^2}=\dfrac{7x^2\cdot .x}{7x^2\cdot 3}=\dfrac{x}{3}$

b) $\dfrac{6a-4b}{4b-6a}=\dfrac{2\cdot(3a-2b)}{-2\cdot(3a-2b)}=\dfrac{2}{-2}=-1$

1.5.2 Sčítání a odčítání lomených výrazů

Opět jako u zlomků platí, že lomené výrazy lze sčítat nebo odčítat pouze v tom případě, pokud mají stejného jmenovatele. Nemají-li, musíme ho nalézt a výrazy na společného jmenovatele převést. Společný jmenovatel musí být co nejjednodušší, musí to být **nejmenší společný násobek** všech jmenovatelů. Dále je výhodné nechat společný jmenovatel ve tvaru součinu, abychom mohli později ve výpočtu využít možnost krácení.

Řešené úlohy

Příklad 14

Zjednodušte dané výrazy:

a) $\dfrac{5}{b}+\dfrac{2}{b+1}=\dfrac{5.(b+1)+2b}{b.(b+1)}=\dfrac{5b+5+2b}{b.(b+1)}=\dfrac{7b+5}{b.(b+1)}$ podm.: $b\neq -1{,}0$

b) $\dfrac{3}{a-7}+\dfrac{a}{7-a}=\dfrac{3}{a-7}+\dfrac{a}{(-1).(a-7)}=\dfrac{3-a}{a-7}$ podm.: $a\neq 7$

c) $\dfrac{x-3}{4x}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{2.(x-3)+6x}{4x}=\dfrac{2x-6+6x}{4x}=\dfrac{8x-6}{4x}$ podm.: $x\neq 0$

d) $\dfrac{a+1}{4-a^2}+\dfrac{a-1}{2a+4}=\dfrac{2.(a+1)+(2-a).(a-1)}{2.(2-a).(2+a)}=\dfrac{2a+2+2a-a^2-2+a}{2.(2-a).(2+a)}=\dfrac{-a^2+5a}{2.(2-a).(2+a)}$

podm.: $a\neq \pm 2$

1.5.3 Násobení a dělení lomených výrazů

Postup je stejný jako u běžných zlomků: **násobíme čitatel čitatelem a jmenovatel jmenovatelem.**

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D} \qquad B \neq 0 \quad \wedge \quad D \neq 0$$

Před násobením vždy, pokud je to možné, krátíme pomocí tzv. křížového pravidla, je třeba stále na tuto možnost myslet a používat ji.

Řešené úlohy

Příklad 15

Zjednodušte dané výrazy:

a) $\frac{6a}{b^2}.\frac{b^3}{3a^2}=\frac{2b}{a}$ podm.: $a,b \neq 0$

b) $3xy \cdot \frac{x-3}{9y^2}=\frac{x^2-3x}{3y}$ podm.: $y \neq 0$

c) $\frac{r^2-s^2}{r^2s}.\frac{r}{rs-s^2}=\frac{(r-s).(r+s)}{r.rs}.\frac{r}{y.(r-s)}=\frac{r+s}{rs}.\frac{1}{s}=\frac{r+s}{rs^2}$

podm.: $r,s \neq 0; r \neq y$

Při dělení lomených výrazů opět postupujeme jako při dělení zlomků. **Dělit lomeným výrazem znamená násobit převrácenou hodnotou výrazu.**

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A.D}{B.C} \qquad B \neq 0 \quad \wedge \quad C \neq 0 \quad \wedge \quad D \neq 0$$

Převrácený výraz k danému lomenému výrazu je výraz, který vznikne tak, že v daném lomeném výrazu vyměníme čitatele se jmenovatelem. Důsledně dbáme na určování **podmínek platnosti výrazů** a to i u čitatelů **výrazů s převrácenou hodnotou.**

Řešené úlohy

Příklad 16

Zjednodušte dané výrazy:

a) $\frac{15y^2}{8x}:\frac{9y}{4x^2}=\frac{15y^2}{8x}.\frac{4x^2}{9y}=\frac{5y}{2}.\frac{x}{3}=\frac{5xy}{6}$ podm.: $x,y\neq 0$

b) $\frac{a^2+a}{2b}:\frac{a+1}{ab}=\frac{a.(a+1)}{2b}.\frac{ab}{a+1}=\frac{a}{2}.\frac{a}{1}=\frac{a^2}{2}$ podm.: $a,b\neq 0; a\neq -1$

c) $\left(m+\frac{1}{n}\right):\frac{1+mn}{m-n}=\left(\frac{my}{n}+\frac{1}{n}\right).\frac{m-n}{1+mn}=\frac{mn+1}{n}.\frac{m-n}{mn+1}=\frac{1}{n}.\frac{m-n}{1}=\frac{m-n}{n}$

podm.: $n\neq m; n\neq 0; mn\neq -1$

1.5.4 Složené lomené výrazy

Při úpravě složených lomených výrazů se postupuje obdobně jako při dělení lomených výrazů.

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A.D}{B.C}=\frac{AD}{BC} \qquad B\neq 0 \ \wedge \ C\neq 0 \ \wedge \ D\neq 0$$

Řešené úlohy

Příklad 17

Zjednodušte dané výrazy:

a) $\frac{\frac{9x}{5y}}{\frac{3x^2}{4y^2}}=\frac{9x}{5y}:\frac{3x^2}{4y^2}=\frac{9x}{5y}.\frac{4y^2}{3x^2}=\frac{3}{5}.\frac{4y}{x}=\frac{12y}{5x}$ podm.: $x,y\neq 0$

b) $\frac{\frac{1+a}{b}}{\frac{a^2-1}{b^2}}=\frac{1+a}{b}:\frac{a^2-1}{b^2}=\frac{1+a}{b}.\frac{b^2}{a^2-1}=\frac{1}{1}.\frac{b}{a-1}=\frac{b}{a-1}$ podm.: $b\neq 0; a\neq \pm 1$

1.6 Úlohy na procvičení

1.1 Určete podmínky, za kterých mají smysl výrazy:

a) $\dfrac{x-y}{z+1}$

b) $\sqrt{2x-4}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{y+3}}$

d) $1-\sqrt{b-3}$

1.2 Nahraďte slovní popis matematickým zápisem:

a) dvojnásobek součtu čísel *a, b*

b) druhá mocnina rozdílu čísel *a, b*

c) rozdíl druhých mocnin čísel *x, y*

d) polovina součtu druhých mocnin čísel *m, n*

e) součet absolutních hodnot čísel *a, b*

1.3 Zjednodušte výrazy:

a) $1-(m-1)-m$

b) $a^2b+2ab^2-ab-(5a^2b^2+2ab^2+ab)+6a^2b^2$

c) $8r+s-[-(2r-s+1)-(r-1)]$

d) $5a^2-[1-(1-a^2)]$

e) $-(ac+2a-c)+ac+2a^2-5$

f) $(2-x)-(3-2x)+(3x+1)$

g) $\{8x-[-(2y+4y)+6x]\}+4x$

h) $12{,}85x-11{,}24y-7{,}64-(6{,}48-6{,}46x)-(-5{,}69x-3{,}24y-4{,}12)$

1.4 Vynásobte:

a) $(3a-b)\cdot(-a)$

b) $2ab\cdot(a^2+b^2)$

c) $(-3)\cdot(3-z)$

d) $4c\cdot(2a-3b+1)$

e) $(3x^2-x+5)\cdot(2x-1)$

f) $(a^2+a-1)\cdot(2-a)$

g) $2\cdot(x-3)\cdot(x+1)$

h) $(a^2-ab+b^2)\cdot(a+b)$

1.5 Umocněte podle vzorců:

a) $(2-a)^2$

b) $(5a+3b)^2$

c) $(-3x+1)^2$

d) $(4a-2b)\cdot(4a+2b)$

e) $(2x+2)^3$

f) $(a-2b)^3$

1.6 Rozložte na součin pomocí vytýkání:

a) $2a+4b$

b) $2a-3ab$

c) $5xy^2+10x^2$

d) $15x^3+10x^2y-20x^2y^3$

e) $3ab^3+6ab^2-18ab$

1.7 Postupným vytýkáním rozložte na součin:

a) $5r+5s-ar-as$

b) $ax^2+bx^2-ay-by$

c) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$

d) x^4+x^3+x+1

e) $x^3-x^2y+xy^2-y^3$

1.8 Pomocí vzorců rozložte na součin:

a) $49-14y+y^2$

b) $4a^2+4a+1$

c) $-x^2+6x-9$

d) y^2-16

e) $9b^2-4a^2$

f) $x^6+3x^4b^3+3x^2b^6+b^9$

g) $64-96r+48r^2-r^3$

h) $27+8b^3$

i) $27a^3-8b^3$

1.9 Kombinované příklady na rozklad na součin.

a) $16x^3-8x^2+x$

b) $2a^5-a^4+b^4-2ab^4$

c) $80-120a+45a^2$

d) $16abx^2+40abxy+25aby^2$

1.10 Určete, kdy má výraz smysl:

a) $\frac{1}{2x}$

b) $\frac{2}{x-2}$

c) $\frac{4x-2}{2x+3}$

d) $\frac{1}{y^2-1}$

1.11 Zkraťte lomené výrazy:

a) $\frac{30xy^2}{12x^2y}$

b) $\frac{s^2-16}{2s^2+8s}$

c) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$

d) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$

1.12 Rozšiřte lomené výrazy tak, aby měly stejné jmenovatele:

a) $\frac{2x}{3y}, \frac{1}{xy}$

b) $\frac{2}{x+1}, \frac{x-1}{x-1}$

c) $\frac{3}{y-7}, \frac{y}{7-y}$

d) $\frac{5}{b}, \frac{2}{b+1}$

1.13 Sečtěte nebo odečtěte lomené výrazy a určete podmínky, kdy výraz dává smysl:

a) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{2}$

b) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$

c) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1$

d) $\dfrac{a+1}{a^2-a}-\dfrac{a-1}{2a^2-2a}$

1.14 Vynásobte lomené výrazy:

a) $\dfrac{36ab^2}{a-b}\cdot\dfrac{a-b}{24ab}$

b) $x^3y^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$

c) $\dfrac{x-2}{x+2}\cdot\dfrac{2+x}{2-x}$

d) $\dfrac{x^2-x^3}{x}\cdot\dfrac{x^2}{1-x}$

e) $\dfrac{3x^2y}{x-5y}\cdot\dfrac{2x-10y}{6xy}$

1.15 Vydělte lomené výrazy:

a) $2b^2:\dfrac{1}{3b}$

b) $\dfrac{x^3}{y^2}:\dfrac{y}{x}$

c) $\dfrac{3r}{2r-1}:\dfrac{2r}{r-2}$

d) $\dfrac{2a+2b}{3a-3b}:\dfrac{6a+6b}{5a-5b}$

e) $\dfrac{c+d}{c-d}:\dfrac{c^2+cd}{2c^2-2d^2}$

1.16 Upravte složené lomené výrazy:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}$

b) $\dfrac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{1}{xy^2}}$

c) $\dfrac{\frac{a^2b}{3}}{\frac{ab^2}{6}}$

d) $\dfrac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$

e) $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{y}{3}}{\frac{x}{3}-\frac{y}{2}}$

2 Vyjádření neznámé ze vzorce

S úpravami výrazů a dosazováním do vzorců se setkáváme nejen v matematice, ale i v dalších vyučovacích předmětech (např. fyzika, chemie, odborné předměty). Důležité je také užívání vzorců a výrazů při řešení praktických úloh v technické praxi.

2.1 Způsob řešení

Při řešení takových úloh můžeme postupovat dvěma způsoby:

a) dosadit do vzorce známé číselné hodnoty a ze vzniklé rovnice vypočítat neznámou hodnotu, těmito výpočty lze získat dílčí hodnoty, které můžeme postupně dosazovat do dalších vzorců;

b) vyjádřit ze vzorců proměnné bez numerických výpočtů a získané výsledky dosazovat do dalších vzorců, takto získat konečný vzorec a do něho teprve dosadit dané číselné hodnoty a provést numerický výpočet.

První způsob je správný, ale matematicky nevhodný. Je velmi pracný a počet chyb v částečných výpočtech se dalším počítáním zvětšuje.

Druhý způsob je výhodnější. Dochází k menším chybám a při dalším počítání můžeme využít konečný vzorec. To je výhodné, jestliže máme určit hodnotu neznámé pro různé číselné hodnoty daných proměnných. Nemusíme se pak zdržovat s řešením daných rovnic pro každý případ zvlášť. Obecné vyjádření požadované proměnné nám také umožňuje pochopit širší souvislosti. V tomto postupu se projevuje snaha zobecnit získané poznatky, což je jeden z charakteristických rysů matematiky.

Jestliže chceme vyjádřit určitou proměnnou z nějakého vzorce, považujeme vzorec za rovnici, ve které všechny proměnné kromě té, kterou chceme vyjádřit, považujeme za konstanty a proměnnou, kterou chceme vyjádřit, za neznámou.

Řešené úlohy

Příklad 1

Vypočtěte výšku lichoběžníku o obsahu S = 35 m^2 a základnách a = 10 m, b = 5 m. Pro výpočet použijeme vzorec pro výpočet obsahu lichoběžníku $S = \frac{(a+c)v}{2}$.

Řešení – způsob a):

$$\begin{aligned}
35 &= \frac{(10+4)\cdot v}{2} && / \cdot 2 \\
70 &= 15 \cdot v && / :15 \\
\frac{70}{14} &= v \\
v &= \frac{70}{14} = 5 \text{ m}
\end{aligned}$$

Výška daného lichoběžníku je 5 m.

Řešení – způsob b):

$$\begin{aligned}
S &= \frac{(a+c)v}{2} && / \cdot 2 \\
2S &= (a+c)v && / :(a+c) \\
\frac{2S}{(a+c)} &= v \\
v &= \frac{2S}{(a+c)} = \frac{2.35}{(10+4)} = \frac{70}{14} = 5 \text{ m}
\end{aligned}$$

Výška daného lichoběžníku je 5 m.

Příklad 2

Vypočtěte celkový odpor R dvou paralelně zapojených vodičů o odporech R_1 = 120 Ω a R_2 = 400 Ω ze vztahu $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Řešení – způsob a):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{120} + \frac{1}{400}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{10+3}{1200}$$
$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{13}{1200} \qquad / \cdot 1200R$$
$$1200 = 13R \qquad / :13$$
$$92{,}3 = \mathrm{R}$$
$$\mathrm{R} = 92{,}3\,\Omega$$

Celkový odpor dvou paralelně zapojených vodičů je 92,3 Ω.

Řešení – způsob b):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \qquad / \cdot RR_1R_2$$
$$R_1R_2 = R(R_1 + R_2) \qquad / :(R_1 + R_2)$$
$$\frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)} = R$$
$$R = \frac{R_1R_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{120 \cdot 400}{120 + 400} = \frac{48000}{520} = 92{,}3\,\Omega$$

Celkový odpor dvou paralelně zapojených vodičů je 92,3 Ω.

Příklad 3

Určete teplotní součinitel odporu hliníku, který má při teplotě t_1 = 0°C odpor R_0 = 5,2 Ω a při teplotě t_2 = 60 °C odpor R = 6,5 Ω. Při výpočtu použijte vztah vyjadřující závislost odporu vodiče na teplotě: $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$, teplotní rozdíl $\Delta T = t_2 - t_1$.

Řešení:

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

$$R = R_0 + \alpha\Delta T R_0 \qquad / - R_0$$

$$R - R_0 = \alpha\Delta T R_0 \qquad / : \Delta T R_0$$

$$\frac{R - R_0}{\Delta T R_0} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{R - R_0}{\Delta T R_0} = \frac{6{,}5 - 5{,}2}{60 \cdot 5{,}2} = 0{,}0043 = 4{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

Teplotní součinitel odporu hliníku je $4{,}3 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}.

Příklad 4

Těleso dopadlo na povrch Země rychlostí v = 20 m·s^{-1}. Z jaké výšky těleso padalo? (Odpor vzduchu neuvažujeme, g = 10 m·s^{-2}). Pro volný pád platí vztahy: $v = gt$, $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Řešení:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{g}$$

$$s = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{v^2}{2g} = \frac{20^2}{2 \cdot 10} = \frac{400}{20} = 20\ \mathrm{m}$$

Těleso padalo z výšky 20 m.

Příklad 5

Vyjádřete ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = 0$ rychlost v_2.

Řešení:

$$
\begin{aligned}
m_1v_1 + m_2v_2 &= 0 && / - m_1v_1 \\
m_2v_2 &= -m_1v_1 && / : m_2 \\
v_2 &= -\frac{m_1v_1}{m_2}
\end{aligned}
$$

Rychlost $v_2 = -\dfrac{m_1v_1}{m_2}$.

2.2 Úlohy na procvičení

2.1 Těleso vržené svisle vzhůru vystoupí za dobu t = 10 s do výšky h = 500 m. Určete, s jakou rychlostí v_0 bylo těleso vrženo, jestliže pro vrh svislý vzhůru platí vztah $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, kde g = 10m.s^{-2}.

2.2 Ze vztahu pro výpočet tepla $Q = mc(t_2 - t_1)$ vyjádřete teplotu t_2.

2.3 Pro velikost odporu měděného drátu, který má kruhový průřez platí vztah $R = \rho\frac{l}{S}$, kde ρ je měrný odpor mědi, l j délka drátu a S je obsah kruhového průřezu ($S = \pi r^2$). Vyjádřete z daných vzorců poloměr kruhu r.

2.4 Kinetická energie tělesa, které má hmotnost m a pohybuje se rychlostí v, je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Vyjádřete z tohoto vzorce hmotnost m.

2.5 Rychlost dopadu tělesa, které spadlo volným pádem z výšky h je $v = \sqrt{2gh}$, kde g = 10 m.s^{-2} je tíhové zrychlení. Z jaké výšky padalo těleso, které dopadlo na Zem rychlostí v = 10 m.s^{-1}?

2.6 Pro objem kužele platí vzorec $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$. Vyjádřete z tohoto vzorce výšku *v*.

2.7 Pro povrch válce výšky *v* a poloměru podstavy *r* platí vzorec $S = 2\pi r(r+v)$. Vyjádřete z tohoto vzorce výšku *v*.

2.8 Pro výpočet kapacity dvou sériově spojených kondenzátorů platí vzorec $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Upravte tento vzorec a vyjádřete C_2, pak dosaďte $C_1 = 5$ F a za $C = 3{,}3\overline{3}$ F a vypočtěte C_2.

2.9 Pro vzájemné silové působení dvou bodových nábojů Q_1 a Q_2 platí Coulombův zákon vyjádřený vztahem $F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$. Vyjádřete z tohoto vztahu velikost náboje Q_1.

2.10 Ze vztahu pro výpočet svorkového napětí $U = U_\mathrm{e} - IR_\mathrm{i}$ vyjádřete vnitřní odpor R_i.

3 Převody jednotek

V matematice, fyzice, elektrotechnice a dalších odborných předmětech vyjadřujeme fyzikální vlastnosti těles tak, aby byly měřitelné. Vlastnosti fyzikálních objektů, které můžeme měřit a vyjadřovat číselně, nazýváme fyzikální veličiny.

3.1 Fyzikální veličiny a jednotky

Fyzikální veličiny jsou určeny **číselnou hodnotou** a **jednotkou**. Měřit fyzikální veličinu znamená porovnávat její velikost s velikostí veličiny stejného druhu, kterou jsme zvolili za jednotku. Číselná hodnota vyjadřuje, kolikrát je měřená fyzikální veličina větší nebo menší než zvolená jednotka.

Fyzikální jednotky jsou stanoveny na základě dohody. Ve většině států světa i u nás je na základě mezinárodních dohod uzákoněna tzv. **Mezinárodní soustava jednotek SI** podle francouzského názvu *Systéme International d`Unités* (systém enternasjonal dynité).

3.1.1 Mezinárodní soustava jednotek SI

1. Mezinárodní soustava jednotek SI je založena na sedmi **základních** fyzikálních veličinách a jejich jednotkách.

Základní veličina	**Značka veličiny**	**Základní jednotka**	**Značka jednotky**
délka	*l*	metr	m
hmotnost	*m*	kilogram	kg
čas	*t*	sekunda	s
elektrický proud	*I*	ampér	A
termodynamická teplota	*T*	kelvin	K
látkové množství	*n*	mol	mol
svítivost	*I*	kandela	cd

2. Soustava SI má dále dvě **doplňkové** jednotky pro rovinný a prostorový úhel.

Veličina	**Značka veličiny**	**Jednotka**	**Značka jednotky**
rovinný úhel	φ	radián	rad
prostorový úhel	Ω	steradián	sr

3. Jednotky dalších fyzikálních veličin získáme odvozením ze základních jednotek dosazením do definičních vztahů těchto veličin. Tyto jednotky nazýváme **odvozené** jednotky soustavy SI,

např.: jednotka rychlosti: $v = \frac{s}{t} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ metr za sekundu,

jednotka síly $F = m \cdot a = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{N}$ newton,

jednotka hustoty $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ kilogram na metr krychlový atd.

4. Do soustavy SI patří také **násobky a díly** základních a odvozených veličin, které vytvoříme pomocí mocnin čísla 10 a vyjadřujeme je pomocí předpon.

Předpona	**Značka**	**Počet jednotek**	**Předpona**	**Značka**	**Počet jednotek**
deka	dk	10	deci	d	10^{-1}
hekto	h	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	piko	p	10^{-12}

Při převádění násobků a dílů fyzikálních veličin na základní veličiny a naopak je nutné umět násobit a dělit čísly: 10; 10^2; 10^3 … a 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} … .

Např: $34 \cdot 10 = 340$ $34 \cdot 10^{-1} = 34 \cdot 0{,}1 = 3{,}4$

$34 \cdot 10^2 = 34 \cdot 100 = 3\,400$ $34 \cdot 10^{-2} = 34 \cdot 0{,}01 = 0{,}34$

$34 \cdot 10^3 = 34 \cdot 1\,000 = 34\,000$ $34 \cdot 10^{-3} = 34 \cdot 0{,}001 = 0{,}034$, atd.

Ve výsledku zůstává pořadí číslic stejné jako v prvním činiteli, pouze se posunuje desetinná čárka. Při násobení čísly 10; 10^2; 10^3 atd. posunujeme desetinnou čárku doprava, při násobení čísly 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} atd. posunujeme desetinnou čárku doleva.

Při převodu plošných jednotek se počet nul nebo desetinných míst ve výsledku zdvojnásobí (mocnitel 2 u jednotky). Při převodu objemových jednotek se počet nul nebo desetinných míst ve výsledku ztrojnásobí (mocnitel 3 u jednotky).

Při velkém počtu desetinných míst nebo nul vyjadřujeme výslednou hodnotu pomocí mocnin čísla 10, např.: 5 nF = $5 \cdot 10^{-9}$ F, 1 268 TJ = $1\,268 \cdot 10^{12}$ J atd.

5. Kromě jednotek soustavy SI se mohou používat další **jednotky užívané spolu s SI**, které se dříve nazývaly vedlejší a jsou vžité v běžné praxi. Patří mezi ně např.: jednotky pro čas – den, hodina, minuta;

jednotka pro objem – litr (1 l = 1 dm^3 = 0,001 m^3);

jednotky pro úhel – úhlový stupeň, úhlová minuta, úhlová vteřina;

jednotka pro hmotnost – tuna (1t = 1 000 kg).

Při výpočtech a dosazování do vzorců musíme tyto jednotky převádět do soustavy SI.

Můžeme se setkat ještě s jednotkami, které se nemají používat, ale vzhledem k tomu, že se některé v praxi objevují, je třeba jim rozumět.

např.: jednotka pro plošný obsah – ar, hektar (1 ha = 100 ar, 1 ha = 10 000 m^2);

jednotka pro hmotnost – metrický cent (1q = 100 kg).

3.1.2 Přehled nejčastěji používaných fyzikálních veličin a fyzikálních jednotek v matematice, fyzice a elektrotechnice

Fyzikální veličina	Značka veličiny	Fyzikální jednotka	Značka jednotky
délka	l	metr	m
plošný obsah	S	čtverečný metr	m^2
objem	V	krychlový metr	m^3
čas	t	sekunda	s
hmotnost	m	kilogram	kg
hustota	ρ	kilogram na krychlový metr	$kg \cdot m^{-3}$
dráha	s	metr	m
rychlost	v	metr za sekundu	$m \cdot s^{-1}$
úhlová rychlost	ω	radián za sekundu	$rad \cdot s^{-1}$
zrychlení	a	metr za sekundu na druhou	$m \cdot s^{-2}$
perioda	T	sekunda	s
frekvence (kmitočet)	f	hertz	Hz
síla	F	newton	N
práce	W	joule	J
energie	E	joule	J

výkon	P	watt	W
moment síly	M	newton metr	N·m
tlak	p	pascal	Pa
látkové množství	n	mol	mol
teplo	Q	joule	J
měrná tepelná kapacita	c	joule na kilogram a kelvin	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
teplota	t	stupeň celsia	°C
termodynamická teplota	T	kelvin	K
vlnová délka	λ	metr	m
napětí	U	volt	V
elektrický potenciál	φ	volt	V
odpor	R	ohm	Ω
vodivost	G	siemens	S
rezistivita	ρ	ohm metr	Ω·m
hustota proudu	J	ampér na čtverečný metr	$A \cdot m^{-2}$
náboj	Q	coulomb	C
plošná hustota náboje	σ	coulomb na čtverečný metr	$C \cdot m^{-2}$
intenzita elektrického pole	E	volt na metr	$V \cdot m^{-1}$
permitivita	ε	farad na metr	$F \cdot m^{-1}$
kapacita	C	farad	F
impedance	Z	ohm	Ω
reaktance	X	ohm	Ω
magnetická indukce	B	tesla	T
magnetický indukční tok	Φ	weber	Wb
intenzita magnetického pole	H	ampér na metr	$A \cdot m^{-1}$
permeabilita	μ	henry na metr	$H \cdot m^{-1}$
indukčnost	L	henry	H
magnetomotorické napětí	F_m	ampér	A
magnetický odpor	R_m	reciproký henry	H^{-1}

Řešené úlohy

Příklad 1:

Vyjádři v základních jednotkách:

$3{,}6\ \text{km} = 3{,}6 \cdot 10^3 = 3{,}6 \cdot 1\,000 = 3\,600\ \text{m}$

$0{,}4\ \text{dm} = 0{,}4 \cdot 10^{-1} = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04\ \text{m}$

$7\,200\ \text{mm} = 7\,200 \cdot 10^{-3} = 7\,200 \cdot 0{,}001 = 7{,}2\ \text{m}$

$260\ \text{cm} = 260 \cdot 10^{-2} = 260 \cdot 0{,}01 = 2{,}6\ \text{m}$

$253\ \text{cm}^2 = 253 \cdot 10^{-4} = 253 \cdot 0{,}000\,1 = 0{,}025\,3\ \text{m}^2$

$44\ \text{dm}^2 = 44 \cdot 10^{-2} = 44 \cdot 0{,}01 = 0{,}44\ \text{m}^2$

$6\,000\,000\ \text{mm}^2 = 6\,000\,000 \cdot 10^{-6} = 6\,000\,000 \cdot 0{,}000\,001 = 6\ \text{m}^2$

$25\ \text{cm}^3 = 25 \cdot 10^{-6} = 25 \cdot 0{,}000\,001 = 0{,}000\,025\ \text{m}^3$

$3{,}7\ \text{mm}^3 = 3{,}7 \cdot 10^{-9} = 3{,}7 \cdot 0{,}000\,000\,001 = 0{,}000\,000\,003\,7\ \text{m}^3$

$28\ \text{l} = 28\ \text{dm}^3 = 28 \cdot 10^{-3} = 28 \cdot 0{,}001 = 0{,}028\ \text{m}^3$

$5\,681\,391\ \text{mg} = 5\,681\,391 \cdot 10^{-6} = 5\,681\,391 \cdot 0{,}000\,001 = 5{,}681\,391\ \text{kg}$

$3\,214\ \text{g} = 3\,214 \cdot 10^{-3} = 3\,214 \cdot 0{,}001 = 3{,}214\ \text{kg}$

$13\ \text{kW} = 13 \cdot 10^3 = 13 \cdot 1\,000 = 13\,000\ \text{W}$

$165\ \text{GJ} = 165 \cdot 10^9\ \text{J} = 165 \cdot 1\,000\,000\,000 = 165\,000\,000\,000\ \text{J}$

$61\ \mu\text{F} = 61 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 61 \cdot 0{,}000\,001 = 0{,}000\,061\ \text{F}$

$39\ \text{mA} = 39 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 39 \cdot 0{,}001 = 0{,}039\ \text{A}$

$$14{,}5\ \text{g}\cdot\text{cm}^{-3} = \frac{14{,}5 \cdot 0{,}001}{0{,}000001}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 14500\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$41\ \text{min}\ 23\ \text{s} = 41 \cdot 60 + 23 = 2\,460 + 23 = 2\,483\ \text{s}$

$1\ \text{h}\ 26\ \text{min} = 1 \cdot 3600 + 26 \cdot 60 = 3\,600 + 1\,560 = 5\,160\ \text{s}$

$1\ \text{kW}\cdot\text{h} = 1\,000 \cdot 3\,600\ \text{W}\cdot\text{s} = 36 \cdot 105\ \text{W}\cdot\text{s} = 36 \cdot 105\ \text{J}$

$15\ \text{kW}\cdot\text{h} = 15 \cdot 1\,000 \cdot 3\,600\ \text{W}\cdot\text{s} = 540 \cdot 105\ \text{W}\cdot\text{s} = 540 \cdot 105\ \text{J}$

$$36\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{36 \cdot 1\,000\ \text{m}}{3\,600\ \text{s}} = \frac{36}{3{,}6} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Příklad 2:

Vyjádři v jednotkách se správnou předponou:

$27 \cdot 10^3$ m = 27 km

$0{,}061 \cdot 10^{-1}$ m = 0,061 dm

$3\,596 \cdot 10^{-3}$ m = 3 596 mm

$320 \cdot 10^{-2}$ m = 320 cm

$2{,}65 \cdot 10^{-4}$ m^2 = 2,65 cm^2

$145 \cdot 10^{-2}$ m^2 = 145 dm^2

$1\,200\,000 \cdot 10^{-6}$ m^2 = 1 200 000 mm^2

$48 \cdot 10^{-6}$ m^3 = 48 cm^3

$3{,}7 \cdot 10^{-9}$ m^3 = 3,7 mm^3

$28 \cdot 10^{-3}$ m^3 = 28 dm^3

$13 \cdot 10^3$ W = 13 kW

$165 \cdot 10^9$ J = 165 GJ

$61 \cdot 10^{-6}$ F = 61 µF

$39 \cdot 10^{-3}$ A = 39 mA

3.2 Úlohy na procvičení

3.1 Vyjádři v základních jednotkách:

a) 6,2 km; 0,026 km; 0,3 dm; 11,5 dm; 65 cm; 0,2 cm; 312 mm; 5 mm;

b) 14,568 dm^3; 2 459 l; 2 689,258 ml; 25 689 235 cm^3; 356 254 189 mm^3; 21 569 378 cl;

c) 5g; 6 235 mg; 3 568 241 mg; 5 687 g; 1,25 t; 0,2568 t; 25 q; 3 560 q;

d) 25 min; 3 h; 41 min 23 s; 1 h 26 min; 2 h 35 min 27 s; 1h 30 min; 1 den;

e) 2,4 $g \cdot cm^{-3}$; 14,5 $g \cdot cm^{-3}$; 0,8 $g \cdot cm^{-3}$; 1,61 $g \cdot cm^{-3}$; 0,87 $g \cdot cm^{-3}$; 7,7 $g \cdot cm^{-3}$;

f) 18 $km \cdot h^{-1}$; 60 $km \cdot h^{-1}$; 90 $km \cdot h^{-1}$; 120 $km \cdot h^{-1}$; 72 $km \cdot h^{-1}$; 30 $km \cdot h^{-1}$; 38,2 $km \cdot h^{-1}$;

g) 0,3 MN; 124 kN; 0,96 kN; 2,5 kJ; 1.4 MJ; 5,3 GJ; 0,21 MPa; 23,5 kW; 1,2 kW;

h) 2 μC; 300 μC; 50 μF; 20 pF; 9,7 pF; 1,6 nF; 9,2 MΩ; 3,5 kΩ; 400 kΩ; 30 mA; 400 mA.

3.2 Vyjádři v jednotkách se správnou předponou:

a) $36 \cdot 10^{3}$ m; $0,015 \cdot 10^{-1}$ m ; $1\,548 \cdot 10^{-3}$ m ; $620 \cdot 10^{-2}$ m ;

b) $1,65 \cdot 10^{-4}$ m^2 ; $658 \cdot 10^{-2}$ m^2 ; $2\,560\,000 \cdot 10^{-6}$ m^2 ;

c) $29 \cdot 10^{-6}$ m^3; $5,4 \cdot 10^{-9}$ m^3; $49 \cdot 10^{-3}$ m^3;

d) $94 \cdot 10^{3}$ W; $368 \cdot 10^{9}$ J ; $629 \cdot 10^{12}$ W;

e) $46 \cdot 10^{-6}$ C ; $18 \cdot 10^{-3}$ A ; $67 \cdot 10^{-12}$ F.

4 Řešení rovnic

Porovnejme následující zápisy: zápis č. 1 $5x \cdot 3x = 15x^2$

zápis č. 2 $5x \cdot 3x = 60$

zápis č. 3 $5x + 3x = 40$

Zápis číslo 1 udává, že výraz před rovnítkem se rovná výrazu za rovnítkem. Takovému zápisu se říká **rovnost**. Rovnost platí pro každou hodnotu čísla x.

Zápisy číslo 2 a 3 se stanou rovností jen při určité velikosti čísla x (v zápise č. 2 $x = 2$, v zápise č. 3 $x = 5$). Tento zápis nazýváme **rovnice**.

Při řešení rovnic provádíme různé úpravy, které vedou ke stále jednodušším rovnicím. Přitom dbáme na to, aby po každé úpravě byla dodržena zásada rovnosti obou stran rovnice. Úpravy, které nám tuto zásadu zaručí, nazýváme **ekvivalentní úpravy**. Jsou to tyto úpravy:

1. K oběma stranám rovnice můžeme přičíst stejné číslo nebo stejný matematický výraz.

2. Obě strany můžeme vynásobit týmž číslem nebo výrazem různým od nuly.

3. Obě strany rovnice můžeme zaměnit.

Pokud provádíme pouze ekvivalentní úpravy, není nutné provádět zkoušku. Většinou však zkoušku provádíme, abychom ověřili správnost řešení.

Mimo tyto úpravy používáme ještě úpravy **dovolené**. Taková úprava **není ekvivalentní,** např.: Obě strany rovnice můžeme umocnit týmž mocnitelem. Pokud použijeme takovou úpravu rovnice **je vždy nutné provádět zkoušku**.

Dále v této kapitole popíšeme základní typy rovnic a způsoby jejich řešení.

4.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice (rovnice 1. stupně) je každá rovnice, kterou lze pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar: $ax + b = 0,$ kde $a, b \in R,$ $a \neq 0,$ x je neznámá.

Člen ax se nazývá lineární člen, a je koeficient lineárního členu, b je absolutní člen.

Každé číslo x, pro které se levá strana dané rovnice rovná nule, se nazývá **kořen (řešení) rovnice**.

Při úpravách lineárních rovnic postupujeme takto:

1. Odstraníme závorky ve výrazech.

2. Vhodným vynásobením obou stran rovnice se zbavíme zlomků.

3. Rovnici upravíme na tvar $ax = -b$.

4. Obě strany rovnice dělíme číslem $a \neq 0$.

Rovnice $ax + b = 0$ má tedy kořen $x = -\frac{b}{a}$, $a \neq 0$.

Řešené úlohy

Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

Příklad 1

$2 \cdot (x+3) + x = 3 \cdot (2x-5)$ nejprve roznásobíme závorky

$2x + 6 + x = 6x - 15$ / $(-6x-6)$

$2x + x - 6x = -15 - 6$

$-3x = -21$ / $: (-3)$

$x = \frac{-21}{-3}$

$x = 7$

Zkouška:

$L = 2 \cdot (7+3) + 7 = 2 \cdot 10 + 7 = 20 + 7 = 27$

$P = 3 \cdot (2 \cdot 7 - 5) = 3 \cdot (14 - 5) = 3 \cdot 9 = 27$

$L = P$

Příklad 2

$$\frac{x-3}{2}+2=\frac{2x+1}{3}+x \qquad /\cdot 6$$
$$3\cdot(x\text{-}3)+12=2\cdot(2x+1)+6x$$
$$3x-9+12=4x+2+6x \qquad /\text{-}4x-6x+9-12$$
$$3x-4x-6x=2+9-12$$
$$-7x=-1 \qquad /:(\text{-}\,7)$$
$$x=\frac{-1}{-7}$$
$$x=\frac{1}{7}$$

Zkouška:

$$L=\frac{\frac{1}{7}-3}{2}+2=\frac{\frac{1-21}{7}}{2}+2=\frac{-20}{7}\cdot\frac{1}{2}+2=\frac{-10}{7}+2=\frac{-10+14}{7}=\frac{4}{7}$$
$$P=\frac{2\cdot\frac{1}{7}+1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{\frac{2+7}{7}}{3}+\frac{1}{7}=\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$
$$L=P$$

Příklad 3

$$5\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2x^2}{3}-\frac{(2x-5)^2}{6}$$
$$\frac{5x}{3}+\frac{5}{2}=\frac{2x^2}{3}-\frac{4x^2-20x+25}{6} \qquad /\cdot 6$$
$$10x+15=4x^2-4x^2+20x-25 \qquad /\text{-}\,20x\text{-}\,15$$
$$10x-20x=-25-15$$
$$-10x=-40 \qquad /:\ (\text{-}10)$$
$$x=\frac{-40}{-10}$$
$$x=4$$

Zkouška:

$$L = 5 \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) = 5 \cdot \frac{8+3}{6} = 5 \cdot \frac{11}{6} = \frac{55}{6}$$

$$P = \frac{2 \cdot 4^2}{3} - \frac{(2 \cdot 4 - 5)^2}{6} = \frac{2 \cdot 16}{3} - \frac{(8-5)^2}{6} = \frac{32}{3} - \frac{3^2}{6} = \frac{32}{3} - \frac{9}{6} = \frac{64-9}{6} = \frac{55}{6}$$

$$L = P$$

Příklad 4

$$4 \cdot [x - 2 \cdot (x+6)] + 5x = x - 3$$

$$4 \cdot [x - 2x + 12] + 5x = x - 3$$

$$4x - 8x + 48 + 5x = x - 3 \qquad / - x - 48$$

$$4x - 8x + 5x - x = -3 - 48$$

$$0 = -51$$

Jestliže při řešení rovnice vznikne **nesprávná rovnost, daná rovnice nemá řešení**.

Příklad 5

$$9 - 4 \cdot (x+1) = 2 \cdot (3 - 2x) - 1$$

$$9 - 4x - 4 = 6 - 4x - 1 \qquad / + 4\text{x} - 9 + 4$$

$$-4\text{x} + 4\text{x} = 6 - 1 - 9 + 4$$

$$0 = 0$$

Jestliže při řešení rovnice vznikne **správná rovnost**, dané rovnici vyhovuje každé číslo, **rovnice má nekonečně mnoho řešení**.

4.2 Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli

Pokud se neznámá v rovnici vyskytuje ve jmenovateli, je nutné před započetím řešení stanovit podmínku řešitelnosti. Víme, že „je zakázáno“ dělit nulou, proto musí být jmenovatel, ve kterém se objevuje neznámá, různý od nuly. Pak řešíme rovnici tak, abychom nejdříve odstranili zlomky. Najdeme společný jmenovatel (nejlépe nejmenší společný násobek všech zlomků) a tím pak celou rovnici vynásobíme. Dále pokračujeme v úpravě s využitím ekvivalentních úprav, až dostaneme řešení $x = -\frac{b}{a}$. Nyní je nutné zjistit, zda vypočtená hodnota neznámé neodporuje stanoveným podmínkám. Pokud se tak stane, není získaná hodnota neznámé kořenem dané rovnice.

Řešené úlohy

Řešte rovnice a proveďte zkoušku:

Příklad 6

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{x} = 2 - \frac{4}{x} \qquad \text{podmínka}: x \neq 0$$

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{x} = 2 - \frac{4}{x} \qquad / \cdot 3x$$

$$4x - 6 = 6x - 12 \qquad / -6x + 6$$

$$-2x = -6 \qquad / :(-2)$$

$$x = 3$$

Zkouška:

$$\mathrm{L} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{L} = \mathrm{P}$$

Příklad 7

$$\frac{x+1}{x+2}=\frac{x}{x-2} \qquad / \cdot (x+2)\cdot(x-2) \qquad \text{podm.}: x \neq \pm 2$$

$$(x+1)\cdot(x-2)=x\cdot(x+2)$$

$$x^2-2x+x-2=x^2+2x \qquad / - x^2 - 2x + 2$$

$$-3x=2 \qquad / : (-3)$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

Zkouška:

$$L=\frac{-\frac{2}{3}+1}{-\frac{2}{3}+2}=\frac{\frac{-2+3}{3}}{\frac{-2+6}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}-2}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{-2-6}{3}}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{8}{3}}=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

$$L=P$$

4.3 Lineární rovnice s absolutní hodnotou

Obsahuje-li rovnice výraz v absolutní hodnotě, je nutné rozdělit množinu reálných čísel na více intervalů. V každém intervalu pak řešíme rovnici samostatně, přepsanou bez absolutních hodnot.

Při tom vycházíme z definice absolutní hodnoty výrazu. Platí: Je-li **hodnota výrazu kladná** nebo **rovna 0**, rovná se jeho absolutní hodnota **výrazu samému**, je-li jeho hodnota **záporná**, rovná se jeho absolutní hodnota výrazu **opačnému**.

Je-li v rovnici jeden výraz v absolutní hodnotě, řešíme rovnici na dvou intervalech, jsou-li v rovnici dva výrazy v absolutní hodnotě, řešíme rovnici na třech intervalech atd.

Postup řešení:

1. Nejprve určíme tzv. **„nulové body“**. Nulový bod je taková hodnota neznámé, při jejímž dosazení je výraz v absolutní hodnotě roven nule. Tento bod tvoří hranici mezi tím, kdy je výraz v absolutní hodnotě kladný a kdy je záporný.
2. Určíme **znaménka jednotlivých výrazů** v absolutních hodnotách v daných intervalech.
3. **Přepíšeme rovnici** bez absolutních hodnot, tzn. odstraníme znaky absolutní hodnoty podle definice absolutní hodnoty výrazu, pro **každý získaný interval zvlášť**.
4. V **každém intervalu řešíme rovnici zvlášť**. Zjistíme, zda **vypočtená hodnota** neznámé **leží v daném intervalu** či **nikoliv**. Pokud **ano**, **je** vypočtená hodnota **kořenem** naší rovnice, pokud **ne**, není tato hodnota kořenem naší rovnice.
5. Pokud získáme vyhovující řešení ve více intervalech. je výsledkem sjednocení všech těchto řešení.

Řešené úlohy

Řešte rovnice

Příklad 8

$|x| = 4$ 1 nulový bod $x_0 = 0$

	$(-\infty,0)$	$\langle 0,\infty)$
x	-	+
	$-x = 4$	$x = 4$
	$x = -4$	
	$-4 \in (-\infty,0)$	$4 \in \langle 0,\infty)$
	$\Rightarrow P_1 = \{-4\}$	$\Rightarrow P_2 = \{4\}$

$P = P_1 \cup P_2 = \{-4;4\}$

Příklad 9

$|x-1| = 5$ 1 nulový bod $x_0 = 1$

	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, \infty)$
$x - 1$	-	+
	$-x+1=5$	$x-1=5$
	$-x=4$	$x=6$
	$x = -4$	$6 \in \langle 1, \infty)$
	$-4 \in (-\infty, 1)$	$\Rightarrow P_2 = \{6\}$
	$\Rightarrow P_1 = \{-4\}$	

$P = P_1 \cup P_2 = \{-4; 6\}$

Příklad 10

$|x+2| = x-4$ 1 nulový bod $x_0 = -2$

	$(-\infty, -2)$	$\langle -2, \infty)$
$x + 2$	-	+
	$-x-2=x-4$	$x+2=x-4$
	$-2x=-2$	$0x=-6$
	$x=1$	$0=-6$
	$1 \notin (-\infty, -2)$	$0 \neq -6$
	$\Rightarrow P_1 = \{\}$	$\Rightarrow P_2 = \{\}$

$P = P_1 \cup P_2 = \{\}$

Příklad 11

$|x+3| = 2-|x+1|$ nulové body $x_0 = -3,-1$

	$(-\infty,-3)$	$\langle -3,-1)$	$\langle -1,+\infty)$
$x+3$	-	+	+
$x+1$	-	-	+
	$-x-3=2-(-x-1)$	$x+3=2-(-x-1)$	$x+3=2-(x+1)$
	$-x-3=2+x+1$	$x+3=2+x+1$	$x+3=2-x-1$
	$-2x=6$	$0=0$	$2x=-2$
	$x=-3$		$x=-1$
	$-3\notin(-\infty,-3)$		$-1\in\langle -1,+\infty)$
	$P_1=\{\}$	$P_2=\langle -3,-1)$	$P_3=\{-1\}$

$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 = \langle -3,-1\rangle$

4.4 Lineární rovnice s parametrem

Lineární rovnice s parametrem je rovnice, ve které se kromě neznámé objevuje ještě další proměnná. Tuto proměnnou nazýváme parametr. Parametr můžeme chápat jako písmeno, které má význam čísla. Parametr může být libovolné reálné číslo. Řešit rovnici s parametrem znamená určit kořeny dané rovnice v závislosti na konkrétních hodnotách parametru. Nedílnou součástí řešení rovnic s parametrem je kromě vyjádření kořenů také diskuze o počtu kořenů v závislosti na hodnotě parametru.

Řešené úlohy

Řešte rovnice a proveďte diskuzi vzhledem k parametru:

Příklad 12

$x\cdot(p+1)=4$ p je parametr, $p\in R$

$$x=\frac{4}{p+1}$$

Diskuze: 1. $p=-1$ $x\in\{\}$ (tzn. rovnice nemá řešení)

2. $p\in R-\{-1\}$ $x=\frac{4}{p+1}$

Příklad 13

$$\frac{x+p}{p} = px - 1 \qquad / \cdot p$$

$$x + p = p^2 x - p \qquad /\text{-}p^2 x - p$$

$$x\text{-}p^2 x = -p \; - p$$

$$x\left(1 - p^2\right) = -2p$$

$$x(1-p)(1+p) = -2p$$

$$x = \frac{-2p}{(1-p)(1+p)}$$

Diskuze:

1. $p = 0$			rovnice nemá smysl
2. $p = 1$		$0 = -2$	rovnice nemá řešení
3. $p = -1$		$0 = 2$	rovnice nemá řešení
4. $p \in$ R - $\{\pm 1\}$			$\Rightarrow x = \frac{-2}{(1-p)(1+p)}$

4.5 Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je každá rovnice, kterou je možné pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar: $ax^2 + bx + c = 0$, kde ax^2 nazýváme kvadratický člen, bx lineární člen, c absolutní člen, a, b, c jsou reálná čísla, $a \neq 0$, x je neznámá.

Kvadratická rovnice má různé tvary:

$ax^2 + bx = 0$, kvadratická rovnice bez absolutního členu

$ax^2 + c = 0$, ryze kvadratická rovnice (rovnice bez lineárního členu)

$ax^2 + +bx + c = 0$ obecná kvadratická rovnice.

Z obecné kvadratické rovnice nejprve vypočítáme diskriminant D = $b^2 - 4ac$.

Je-li $D > 0$, pak výsledkem jsou kořeny x_1, x_2 $\qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

je-li $D = 0$, pak výsledkem je jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2}$. $\qquad x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$

je-li D < 0, pak rovnice nemá na množině reálných čísel řešení.

Má-li kvadratická rovnice tvar kvadratické rovnice bez absolutního členu nebo tvar ryze kvadratické rovnice, není nutné diskriminant počítat a rovnice lze řešit rozkladem na součin dvou dvojčlenů, buď pomocí vytýkání nebo s využitím vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$.

Řešené úlohy

Řešte rovnice:

Příklad 14

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x\cdot(x-5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 5 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 5$$

Rovnice má dva kořeny. Při řešení kvadratické rovnice bez absolutního členu, je vždy jeden kořen roven 0.

Příklad 15

$$3x^2 + 21x = 0$$

$$3x\cdot(x+7) = 0$$

$$3x = 0 \quad \vee \quad x + 7 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -7$$

Rovnice má dva kořeny.

Příklad 16

$$x_2 - 25 = 0$$

Tento typ rovnice můžeme řešit dvojím způsobem.

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(x-5)\cdot(x+5) = 0$$

$$x - 5 = 0 \qquad \vee \qquad x + 5 = 0$$

$$x_1 = 5 \qquad\qquad x_2 = -5$$

Jiný způsob řešení:

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25}$$

$$x_{1,2} = \pm 5$$

Při použití kteréhokoliv způsobu řešení musíme dojít ke stejnému výsledku. Takovýto typ rovnice má vždy dva kořeny. Tyto kořeny jsou čísla opačná.

Příklad 17

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Tato rovnice má dva kořeny $x_1 = 3$ a $x_2 = 2$.

Příklad 18

$$x^2 + 16 = 8x$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Tato rovnice má jeden tzv. dvojnásobný kořen.

Tento typ úplné kvadratické rovnice, ve které je diskriminant roven nule, lze řešit také rozkladem na součin s využitím vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$$x^2 + 16 = 8x$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

$$(\mathrm{x} - 4) \cdot (x - 4) = 0$$

$$x = 4$$

Příklad 19

$$5x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 36 - 160 = -124$$

Diskriminant D < 0 a proto rovnice nemá řešení v množině reálných čísel.

Některé rovnice s neznámou ve jmenovateli mohou vést na řešení kvadratické rovnice. U takové rovnice musíme nejprve stanovit podmínky řešitelnosti a potom rovnici pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar $ax^2 + +bx + c = 0$. Dále řešíme rovnici pomocí výpočtu diskriminantu a vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Příklad 20

$$\frac{x}{x+3}=2+\frac{5}{x-1} \qquad / \cdot (\mathrm{x}+3)\cdot(x-1) \qquad \text{podmínky } x\neq -3 \wedge x\neq 1$$

$$x\cdot(x-1)=2\cdot(x+3)\cdot(x-1)+5\cdot(x+3)$$

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = 2\cdot(\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 3\mathrm{x} - 3)+5x+15$$

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = 2x^2-2x+6x-6+5x+15$$

$$0=2x^2-2x+6x-6+5x+15-\mathrm{x}^2+x$$

$$x^2+10x+9=0$$

$$D=10^2-4\cdot 1\cdot 9=100-36=64$$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\frac{-10\pm 8}{2}$$

$$x_1=\frac{-10+8}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$x_2=\frac{-10-8}{2}=\frac{-18}{2}=-9$$

Oba kořeny splňují podmínky řešitelnosti, a proto má rovnice dva kořeny x_1 =-1, x_2 = -9

Příklad 21

$$x+\frac{3}{x-1}=2+\frac{x+2}{x-1} \qquad \text{podmínky } x\neq 1$$

$$x\cdot(x-1)+3=2\cdot(x-1)+x+2$$

$$x^2-2x+3=2x-x+x+2$$

$$x^2-2x+3-2x+x-x+2=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

Kořen $x_2 = 1$ odporuje podmínce, a proto nemůže být řešením dané rovnice, daná kvadratická rovnice má pouze jeden kořen $x = 3$.

4.6 Úlohy na procvičení

4.1 Řešte rovnice v množině R a proveďte zkoušku:

a) $6x + 8 = 2x + 8 - 4x$

b) $2(x+3) - 3(x+3) = -4(x+3)$

c) $1{,}1x + 2{,}6 - 0{,}5x = 1{,}5 + 1{,}6x - 0{,}7$

d) $\frac{x+3}{5} = 8 - \frac{x-1}{4}$

4.2 Řešte rovnice v množině R, proveďte zkoušku a stanovte podmínky řešitelnosti:

a) $\frac{1}{x} - \frac{2}{3x} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+2}{x-2}$

c) $\frac{2x-3}{3x+1} = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{3x+1}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{3}{x+3} = \frac{6}{2x+6} - 1$

4.3 Řešte rovnice v množině R:

a) $x = 5 - |x - 3|$

b) $x - 4 = |2 - 3x|$

c) $|x - 2| - 2 = 2x - |x + 2|$

d) $|x| - 2 = |x - 2|$

4.4 Řešte rovnice a proveďte diskuzi vzhledem k parametru:

a) $x(p - 2) = p^2 - 4$ parametr $p \in R$

b) $x(2p - 1) = -2(2p - 1)$ parametr $p \in R$

c) $4px + 4p = 1 + x$ parametr $p \in R$

d) $\frac{2 - t}{t} = \frac{2}{x - 1}$ parametr $t \in R$

4.5 Řešte rovnice v množině R a proveďte zkoušku:

a) $x - \frac{x}{x + 1} = 1 - \frac{1}{x + 1}$

b) $(2x + 3)(3x - 4) = 10 - (4x - 5)(5x + 6)$

c) $x^2 + 15x = 216$

d) $\frac{x + 3}{x - 3} = 4 - \frac{x - 1}{x - 5}$

5 Řešení soustav rovnic

V praxi často narážíme na příklady, ve kterých neřešíme jednu rovnici, ale řešíme zároveň dvě či více rovnic se stejnými neznámými. Při řešení soustav rovnic používáme již známé ekvivalentní úpravy. Způsoby řešení takových soustav rovnic si ukážeme v této kapitole.

5.1 Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých rozumíme dvě rovnice se společnými neznámými (např. x, y). Řešením takové soustavy je buď jediná uspořádaná dvojice čísel $[x;y]$, nekonečně mnoho uspořádaných dvojic čísel $[x;y]$, nebo nemá soustava žádné řešení. Soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých můžeme řešit několika různými metodami. Pomocí ekvivalentních úprav nejprve upravíme obě rovnice na tvar, ve kterém jsou neznámé na levé straně rovnic a na pravé straně rovnic je reálné číslo, pak teprve vybereme vhodnou metodu řešení.

5.1.1 Metoda dosazovací (substituční)

V této metodě vyjádříme z jedné rovnice jednu z neznámých a tento výraz pak dosadíme do druhé rovnice. Tím vznikne lineární rovnice s jednou neznámou, kterou řešíme pomocí ekvivalentních úprav. Získanou hodnotu jedné neznámé dosadíme do některé z rovnic soustavy a dopočítáme hodnotu druhé neznámé.

Řešené úlohy

Příklad 1

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ \underline{x + y} &\underline{= 5} \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vyjádříme x: $x = 5 - y$

Dosadíme do první rovnice:

$$
\begin{aligned}
2\cdot(5-y)-y&=1\\
10-2y-y&=1 \qquad /-10\\
-3y&=-9 \qquad /:(-3)\\
y&=\frac{-9}{-3} \qquad \underline{\underline{y=3}}\\
x&=5-3\\
&\qquad \underline{\underline{x=2}}
\end{aligned}
$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;3].

Zkoušku provádíme dosazením vypočtených hodnot do obou rovnic.

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 2\cdot 2-3=4-3=1 & \qquad L_2 &= 2+3=5\\
P_1 &= 1 & P_2 &= 5\\
L_1 &= P_1 & L_2 &= P_2
\end{aligned}
$$

Příklad 2

Řešte soustavu rovnic v R:

$$
\begin{aligned}
4x+2y&=6\\
\underline{5x-3y}&\underline{=13}
\end{aligned}
$$

Z první rovnice vyjádříme y: $y=\frac{6-4x}{2}$

$$y=3-2x$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$
\begin{aligned}
5x-3\cdot(3-2x)&=13\\
5x-9+6x&=13\\
11x&=22\\
x&=\frac{22}{11} \qquad \underline{\underline{x=2}}\\
y&=3-2\cdot 2 \qquad \underline{\underline{y=-1}}
\end{aligned}
$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;-1].

Zkouška:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= 4\cdot 2+2\cdot(-1)=8-2=6 & \qquad L_2 &= 5\cdot 2-3\cdot(-1)=10+3=13\\
P_1 &= 6 & P_2 &= 13\\
L_1 &= P_1 & L_2 &= P_2
\end{aligned}
$$

Příklad 3

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{array}{l} \frac{x}{2} + y = 1 \\ \underline{x + 2y = -2} \end{array}$$

Z první rovnice vyjádříme x: $x = 2 - 2y$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 2 - 2y + 2y &= -2 \\ 2 &= -2 \\ 2 &\neq -2 \end{aligned}$$

Dospěli jsme k nepravdivému výroku, a proto daná soustava rovnic nemá řešení.

Příklad 4

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{array}{ll} 10x - 2y = 6 & / : 2 \\ \underline{2 \cdot (x - y) + y = 3 \cdot (1 - x)} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5x - y = 3 & \\ \underline{2x - 2y + y = 3 - 3x} & / - 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x - y = 3 \\ \underline{5x - y = 3} \end{array}$$

Z jedné rovnice vyjádříme y: $y = 5x$-3

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 5x - (5x - 3) &= 3 \\ 5x - 5x + 3 &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Dospěli jsme k pravdivému výroku, a proto má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

5.1.2 Metoda sčítací (adiční)

Princip sčítací metody spočívá v tom, že vhodně vynásobíme jednu nebo obě rovnice (čísly různými od nuly) tak, aby po sečtení rovnic zmizela jedna z proměnných a z obou rovnic vznikla jedna lineární rovnice s jednou neznámou, kterou řešíme pomocí ekvivalentních úprav. Získanou hodnotu jedné neznámé dosadíme do některé z rovnic soustavy a dopočítáme hodnou druhé neznámé.

Řešené úlohy

Příklad 5

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Nyní spolu obě rovnice sečteme a získáme jednu lineární rovnici:

$$3x = 6 \qquad / : 3$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Výsledek dosadíme např. do druhé rovnice a vypočteme y.

$$2 + y = 5 \qquad / - 2$$
$$\underline{\underline{y = 3}}$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;3].

Zkouška:

$$L_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \qquad L_2 = 2 + 3 = 5$$
$$P_1 = 1 \qquad P_2 = 5$$
$$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2$$

Příklad 6

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \qquad / \cdot 3 \\ 5x - 3y &= 13 \qquad / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12x + 6y &= 18 \\ 10x - 6y &= 26 \end{aligned}$$

Nyní spolu obě rovnice sečteme a získáme jednu lineární rovnici:

$$22x = 44 \qquad / : 22$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Výsledek dosadíme např. do druhé rovnice a vypočteme *y*.

$$4 \cdot 2 + 2y = 6$$

$$2y = 6 - 8$$

$$2y = -2 \qquad / : (-2)$$

$$\underline{\underline{y = -1}}$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;-1].

Zkouška:

$L_1 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 8 - 2 = 6$

$P_1 = 6$

$L_1 = P_1$

$L_2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 10 + 3 = 13$

$P_2 = 13$

$L_2 = P_2$

Příklad 7

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\frac{x}{2} + y = 1 \qquad / \cdot (-2)$$

$$\underline{x + 2y = -2}$$

$$-x - 2y = -2$$

$$\underline{x + 2y = -2}$$

Nyní spolu obě rovnice sečteme a získáme výraz: $0 = -4$

Dospěli jsme k nepravdivému výroku, a proto daná soustava rovnic nemá řešení.

Příklad 8

Řešte soustavu rovnic v R:

$$10x - 2y = 6 \qquad / : 2$$

$$\underline{2 \cdot (x - y) + y = 3 \cdot (1 - x)}$$

$$5x - y = 3$$

$$\underline{2x - 2y + y = 3 - 3x} \qquad / - 3x$$

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3 \qquad /\cdot(-1) \\ 5x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5x + y &= -3 \\ 5x - y &= 3 \end{aligned}$$

Nyní spolu obě rovnice sečteme a získáme výraz: $0 = 0$.

Dospěli jsme k pravdivému výroku, a proto má daná soustava nekonečně mnoho řešení.

5.1.3 Metoda srovnávací (komparační)

Při použití této metody vyjádříme z obou rovnic stejnou neznámou. Protože levé strany rovnic jsou si rovny, musí si být rovny i pravé strany. Tak opět získáme lineární rovnici s jednou neznámou. Tuto rovnici vyřešíme, tím získáme hodnotu jedné neznámé a dále postupujeme stejně jako při použití dosazovací nebo sčítací metody. Získanou hodnotu jedné neznámé dosadíme do některé z rovnic soustavy a dopočítáme hodnou druhé neznámé.

Řešené úlohy

Příklad 9

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme x: $\Rightarrow x = \frac{1+y}{2}$

$\Rightarrow x = 5 - y$

Protože se rovnají levé strany rovni, musí se rovnat i pravé strany:

$$\begin{aligned} \frac{1+y}{2} &= 5 - y \qquad /\cdot 2 \\ 1 + y &= 2\cdot(5 - y) \\ 1 + y &= 10 - 2y \\ 3y &= 9 \qquad /:3 \\ y &= 3 \\ x &= 5 - 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;3].

Zkouška:

$L_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$ $\quad$ $L_2 = 2 + 3 = 5$

$P_1 = 1$ $\quad$ $P_2 = 5$

$L_1 = P_1$ $\quad$ $L_2 = P_2$

Příklad 10

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\underline{\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \\ 5x - 3y &= 13 \end{aligned}}$$

Z obou rovnic vyjádříme y:
$$\Rightarrow y = \frac{6-4x}{2}$$
$$\Rightarrow y = \frac{5x-13}{3}$$

Protože se rovnají levé strany rovnice, musí se rovnat i pravé strany:

$$\frac{6-4x}{2} = \frac{5x-13}{3} \qquad / \cdot 6$$
$$3 \cdot (6-4x) = 2 \cdot (5x-13)$$
$$18 - 12x = 10x - 26 \qquad /\text{-}10x\text{-}18$$
$$-22x = -44 \qquad / : (\text{-}22)$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$
$$y = \frac{6-4 \cdot 2}{2}$$
$$y = \frac{-2}{2}$$
$$\underline{\underline{y = -1}}$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;-1].

Zkouška:

$L_1 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 8 - 2 = 6$ $\quad$ $L_2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 10 + 3 = 13$

$P_1 = 6$ $\quad$ $P_2 = 13$

$L_1 = P_1$ $\quad$ $L_2 = P_2$

5.1.4 Metoda grafická

Při grafickém řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých vyjádříme z obou rovnic y, tzn., že obě rovnice vyjádříme jako předpis lineární funkce. Sestrojíme grafy těchto funkcí do jedné kartézské soustavy souřadnic. Zjistíme souřadnice společných bodů obou grafů, tyto souřadnice jsou řešením dané soustavy.

Řešené úlohy

Příklad 11

Řešte soustavu rovnic v R:

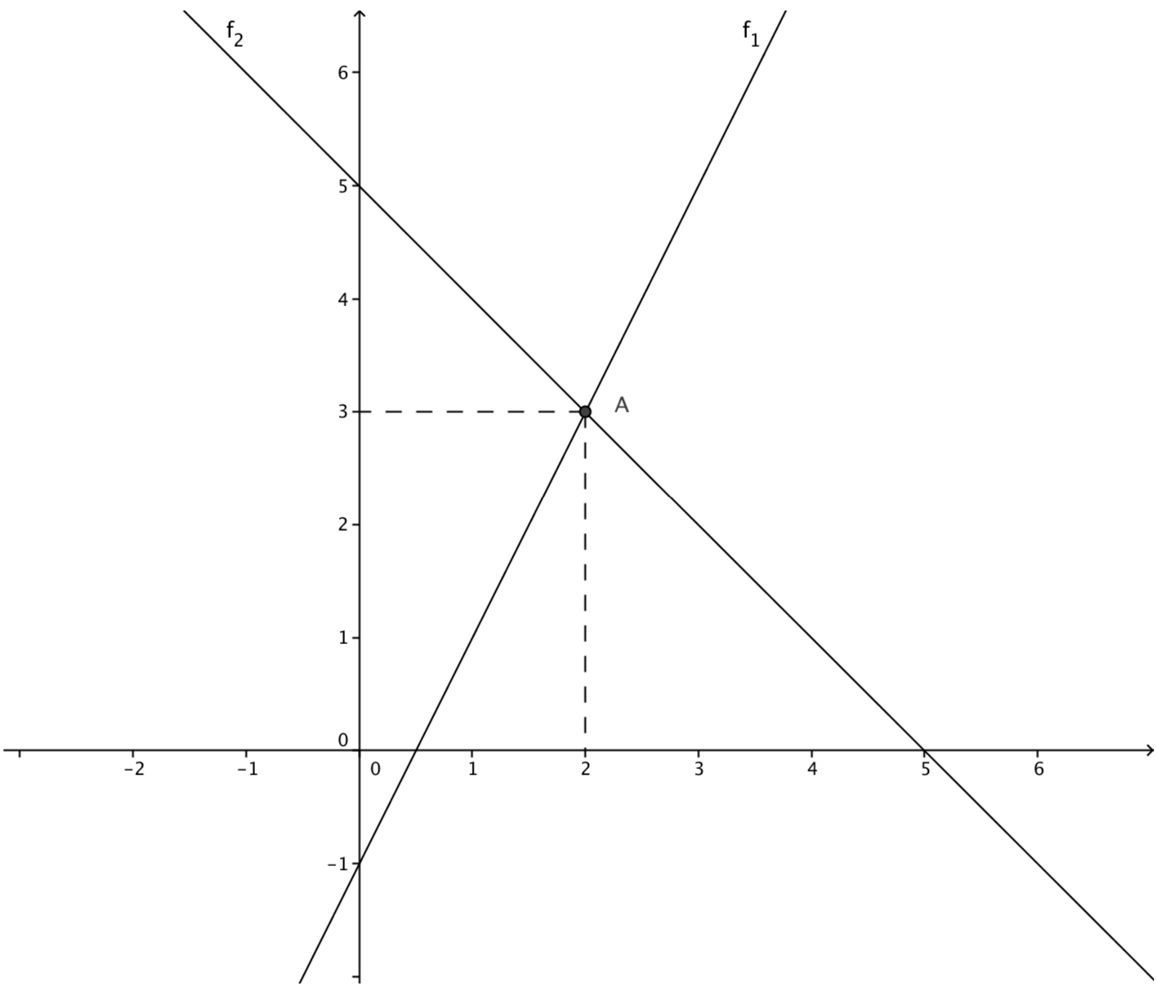
$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{Z obou rovnic vyjádříme } y\text{:} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad f_1 : y = 2x - 1 \\ &\Rightarrow \quad f_2 : y = -x + 5 \end{aligned}$$

f_1:

x	0	0,5
y	-1	0

f_2:

x	0	5
y	5	0



Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;3].

Zkouška:

$$L_1 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \qquad L_2 = 2 + 3 = 5$$

$$P_1 = 1 \qquad P_2 = 5$$

$$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2$$

Příklad 12

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \\ 5x - 3y &= 13 \end{aligned}$$

Z obou rovnic vyjádříme y:

$$\Rightarrow \quad f_1 : y = -2x + 3$$

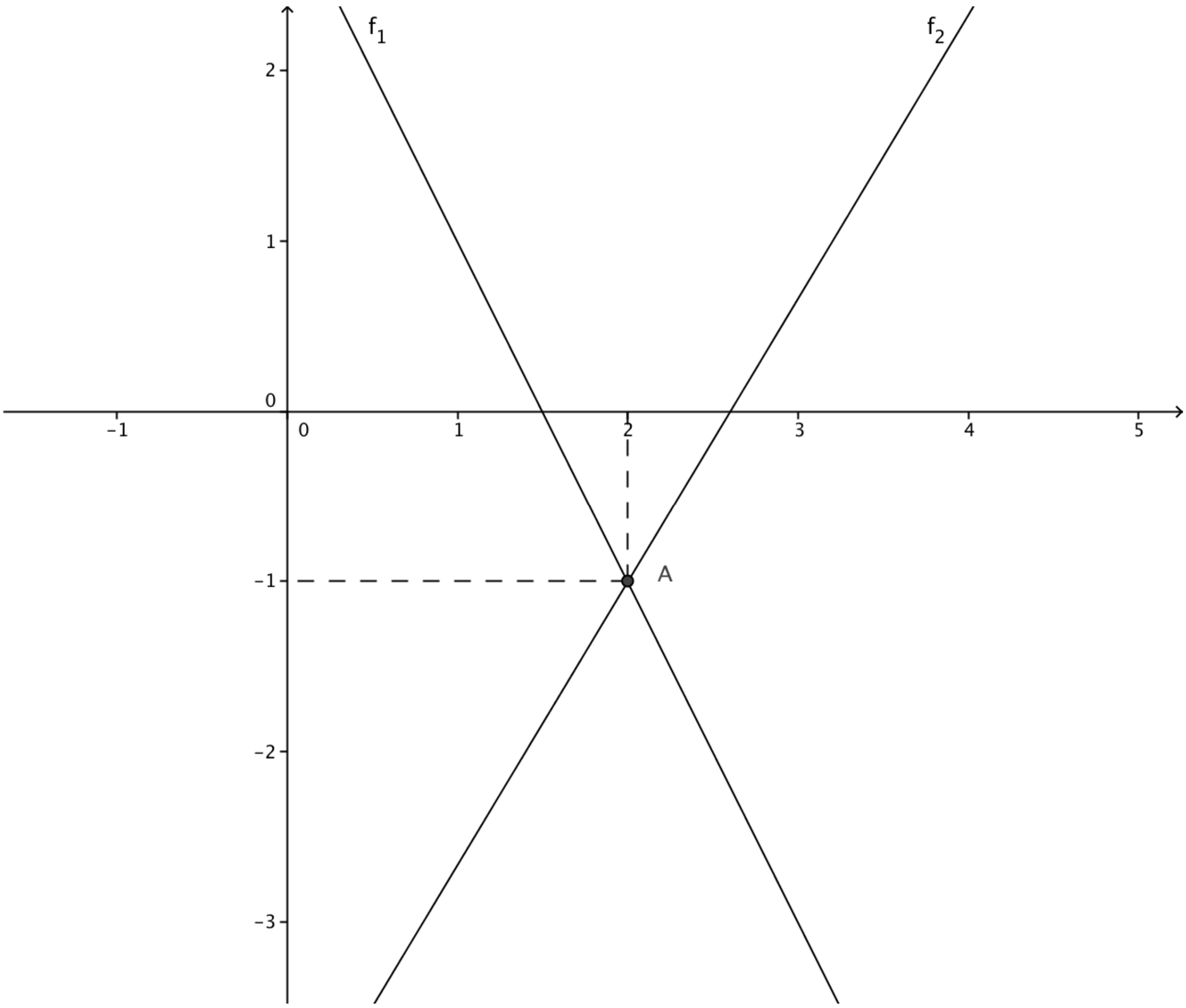
$$\Rightarrow \quad f_2 : y = \frac{5x}{3} - \frac{13}{3}$$

f_1:

x	0	1,5
y	3	0

f_2:

x	0	5
y	$\frac{13}{3}$	0



Řešením dané soustavy je uspořádaná dvojice [2;-1].

Zkouška:

$$L_1 = 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 8 - 2 = 6 \qquad L_2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 10 + 3 = 13$$

$$P_1 = 6 \qquad P_2 = 13$$

$$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2$$

Příklad 13

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\frac{x}{2} + y = 1 \quad \Rightarrow \quad f_1 : y = -\frac{x}{2} + 1$$

Z obou rovnic vyjádříme y:

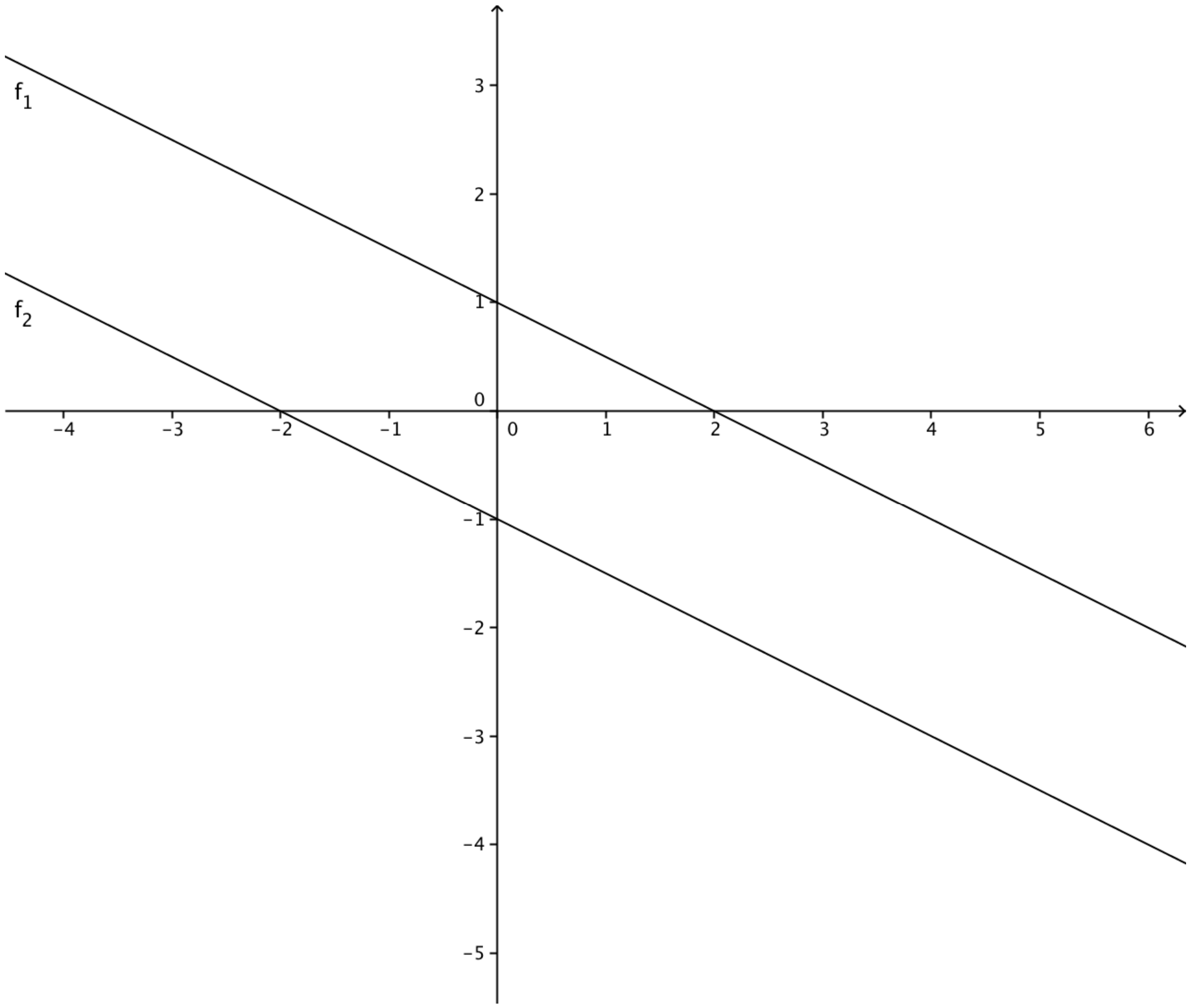
$$x + 2y = -2 \quad \Rightarrow \quad f_2 : y = -\frac{x}{2} - 1$$

f_1:

x	0	2
y	1	0

f_2:

x	0	-2
y	-1	0



Přímky, které jsou grafem funkcí f_1 a f_2 jsou navzájem rovnoběžné různé, nemají tedy žádný společný bod a proto soustava rovnic nemá řešení.

Příklad 14

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{array}{ll} 10x-2y=6 & /:2 \\ \underline{2\cdot(x-y)+y=3\cdot(1-x)} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} 5x-y=3 & \\ \underline{2x-2y+y=3-3x} & /-3x \end{array}$$

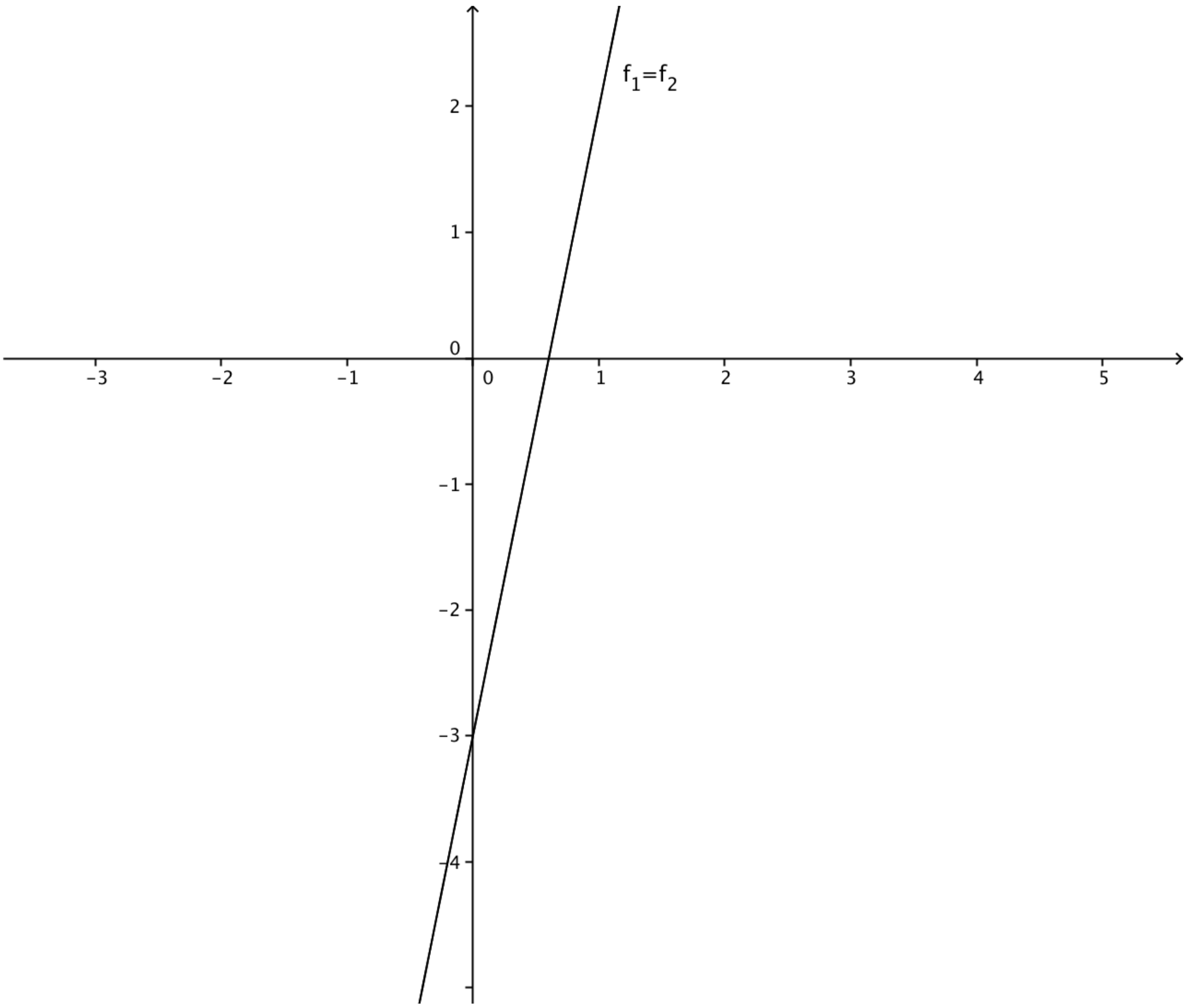
$$\Rightarrow \begin{array}{l} 5x-y=3 \\ \underline{5x-y=3} \end{array} \quad \text{Z obou rovnic vyjádříme } y\text{:} \quad \begin{array}{ll} \Rightarrow & f_1 : y=5x-3 \\ \Rightarrow & f_2 : y=5x-3 \end{array}$$

f_1:

x	0	$\frac{3}{5}$
y	-3	0

f_2:

x	0	$\frac{3}{5}$
y	-3	0



Přímky, které jsou grafem funkcí f_1 a f_2, spolu navzájem splývají, mají tedy všechny body společné, a proto soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

5.2 Soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých

Při řešení soustav tří rovnic o třech neznámých nejčastěji používáme metodu dosazovací. Z jedné z rovnic vyjádříme jednu neznámou, tu dosadíme do zbývajících dvou rovnic. Takto vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých, které řešíme vhodně zvolenou metodou. Po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých dosadíme vypočtené hodnoty do některé z rovnic (nejvhodnější je dosadit do rovnice, ze které jsme na počátku výpočtu vyjadřovali jednu neznámou) a dopočítáme poslední neznámou. Soustava tří rovnic o třech neznámých má (stejně jako soustava dvou rovnic o dvou neznámých) jedno řešení, nebo nekonečně mnoho řešení, nebo nemá žádné řešení.

Řešené úlohy

Příklad 15

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{aligned} x+y+2z&=4\\ -2x+y-6z&=6\\ 3x-2y+5z&=-7 \end{aligned}$$

Z 1. rovnice vyjádříme x a dosadíme do zbývajících dvou rovnic: $x=4-y-2z$

$$\begin{aligned} -2\cdot(4-y-2z)+y-6z&=6\\ 3\cdot(4-y-2z)-2y+5z&=-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -8+2y+4z+y-6z&=6\\ 12-3y-6z-2y+5z&=-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y-2z&=6+8\\ -5y-z&=-7-12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y-2z&=14\\ -5y-z&=-19 \quad /\cdot(-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3y-2z&=14\\ 10y+2z&=38 \end{aligned}$$

Obě rovnice spolu sečteme a získáme výraz:

$13y=52 \qquad /:13$

$\underline{\underline{y=4}}$

Vypočtenou hodnotu y dosadíme do jedné z posledních dvou rovnic a vypočteme z:

$$3 \cdot 4 - 2z = 14 \qquad / -12$$
$$-2z = 14 - 12$$
$$-2z = 2 \qquad / : (-2)$$
$$\underline{\underline{z = -1}}$$

Vypočtené hodnoty y a z dosadíme do rovnice vyjadřující x a vypočteme hodnotu x:

$$x = 4 - y - 2z$$
$$x = 4 - 4 - 2 \cdot (-1)$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Řešením dané soustavy je uspořádaná trojice čísel [2;4;-1].

Zkouška:

$L_1 = 2 + 4 + 2 \cdot (-1)$	$L_2 = -2 \cdot 2 + 4 - 6 \cdot (-1)$	$L_3 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1)$
$L_1 = 4$	$L_2 = 6$	$L_3 = -7$
$P_1 = 4$	$P_2 = 6$	$P_3 = -7$
$L_1 = P_1$	$L_2 = P_2$	$L_3 = P_3$

Příklad 16

Řešte soustavu rovnic v R:

$$x + 3y = 20$$
$$-3y + 2z = 0$$
$$\underline{-2x + z = -10}$$

Z 1. rovnice vyjádříme x a dosadíme do třetí rovnice: $x = 20 - 3y$

$$-3y + 2z = 0$$
$$\underline{-2 \cdot (20 - 3y) + z = -10}$$

$$-3y + 2z = 0$$
$$\underline{-40 + 6y + z = -10} \qquad / + 40$$

$$-3y + 2z = 0 \qquad / \cdot 2$$
$$\underline{6y + z = 30}$$

$$-6y + 4z = 0$$
$$\underline{6y + z = 30}$$

Obě rovnice spolu sečteme a získáme výraz:

$5z = 30 \quad / : 5$

$\underline{\underline{z = 6}}$

Vypočtenou hodnotu z dosadíme do jedné z posledních dvou rovnic a vypočteme y:

$$6y + 6 = 30 \quad / -6$$
$$6y = 24 \quad / : 6$$

$\underline{\underline{y = 4}}$

Vypočtenou hodnotu y dosadíme do první rovnice a vypočteme x:

$x = 20 - 3y$

$x = 20 - 3 \cdot 4$

$\underline{\underline{x = 8}}$

Řešením dané soustavy je uspořádaná trojice čísel [8;4;6].

Zkouška:

$L_1 = 8 + 3 \cdot 4 = 20 \qquad L_2 = -3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0 \qquad L_3 = -2 \cdot 8 + 6 = -10$

$P_1 = 20 \qquad P_2 = 0 \qquad P_3 = -10$

$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2 \qquad L_3 = P_3$

Příklad 17

Řešte soustavu rovnic v R:

$$x + y = 5$$
$$2x - 3y + z = 8$$
$$x - 4y + z = 3$$

Z 1. rovnice vyjádříme x a dosadíme do třetí rovnice: $x = 5 - y$

$$2 \cdot (5 - y) - 3y + z = 8$$
$$(5 - y) - 4y + z = 3$$

$$10 - 2y - 3y + z = 8$$
$$5 - y - 4y + z = 3$$

$$10 - 5y + z = 8 \quad / -10$$
$$5 - 5y + z = 3 \quad / -5$$

$$-5y + z = -2 \quad / \cdot (-1)$$
$$-5y + z = -2$$

$$\begin{array}{r} 5y - z = 2 \\ \underline{-5y + z = -2} \end{array}$$

Obě rovnice spolu sečteme a získáme výraz: $0 = 0$

Dospěli jsme k pravdivému výroku, a proto má daná soustava rovnic nekonečně mnoho řešení.

Příklad 18

Řešte soustavu rovnic v R:

$$\begin{array}{r} x - y + z = 5 \\ -x + 2y + 2z = 10 \\ \underline{-2x + 3y + z = 16} \end{array}$$

Z 1. rovnice vyjádříme x a dosadíme do třetí rovnice: $x = 5 + y - z$

$$\begin{array}{r} -(5 + y - z) + 2y + 2z = 10 \\ \underline{-2 \cdot (5 + y - z) + 3y + z = 16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5 - y + z + 2y + 2z = 10 \\ \underline{-10 - 2y + 2z + 3y + z = 16} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} -5 + y + 3z = 10 & /+5 \\ \underline{-10 + y + 3z = 16} & /+10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} y + 3z = 15 & /\cdot(-1) \\ \underline{y + 3z = 26} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -y - 3z = -15 \\ \underline{y + 3z = 26} \end{array}$$

Obě rovnice spolu sečteme a získáme výraz: $0 = 11$

Dospěli jsme k nepravdivému výroku, a proto daná soustava rovnic nemá řešení.

5.3 Soustava lineární a kvadratické rovnice

Při řešení soustavy jedné lineární a jedné kvadratické rovnice používáme metodu dosazovací. Z lineární rovnice vyjádříme vhodně jednu neznámou a tu dosadíme do kvadratické rovnice. Kvadratickou rovnici řešíme obvyklým způsobem, jak jsme si vysvětlili dříve. Po vyřešení kvadratické rovnice a výpočtu jedné neznámé dosadíme vypočtenou hodnotu zpět do lineární rovnice a dopočítáme hodnotu druhé neznámé. Soustava lineární a kvadratické rovnice může mít dvě řešení, jedno řešení, nekonečně mnoho řešení nebo nemá žádné řešení.

Řešené úlohy

Příklad 19

Řešte soustavu rovnic v R:

$x^2 + y^2 = 1$

$x + 3y = 3$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do druhé rovnice: $x = 3 - 3y$

$$(3-3y)^2 + y^2 = 1$$

$$9 - 18y + 9y^2 + y^2 = 1$$

$$10y^2 - 18y + 8 = 0 \qquad /:2$$

$$5y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 81 - 80 = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm 1}{10}$$

$$y_1 = \frac{9+1}{10} = 1$$

$$y_2 = \frac{9-1}{10} = \frac{4}{5}$$

Dosazením vypočtených hodnot y_1 a y_2 do lineární rovnice vypočítáme hodnoty x_1 a x_2.

$x_1 = 3 - 3 \cdot 1$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3 - 3 \cdot \frac{4}{5} = 3 - \frac{12}{5}$

$x_2 = \frac{3}{5}$

Řešením této soustavy rovnic jsou dvě uspořádané dvojice čísel $[0;1], \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$.

Zkouška:

$L_{1,1} = 0^2 + 1^2 = 0 + 1 = 1 = P_{1,1}$

$L_{1,2} = 0 + 3 \cdot 1 = 3 = P_{1,2}$

$L_{2,1} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1 = P_{2,1}$

$L_{2,2} = \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = \frac{15}{5} = 3 = P_{2,2}$

Příklad 20

Řešte soustavu rovnic v R:

$-x^2 + 2y^2 = -3$

$2x + y = 1$

Z druhé rovnice vyjádříme y a dosadíme do první rovnice: $y = 1 - 2x$

$-x^2 + 2 \cdot (1 - 2x)^2 = -3$

$-x^2 + 2 \cdot (1 - 4x + 4x^2) = -3$

$-x^2 + 2 - 8x + 8x^2 = -3$

$7x^2 - 8x + 5 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 5 = 64 - 140 = -76$

Diskriminant této kvadratické rovnice je záporný, takže tato rovnice nemá řešení v R. Z toho vyplývá, že nemá řešení ani daná soustava rovnic.

Příklad 21

Řešte soustavu rovnic v R:

$$2y^2 - xy + x - y - 1 = 0$$

$$-x + 2y + 1 = 0$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice: $x = 2y + 1$

$$2y^2 - (2y+1)\cdot y + 2y + 1 - y - 1 = 0$$

$$2y^2 - 2y^2 - y + 2y + 1 - y - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

Dospěli jsme k pravdivému výroku, a proto má daná soustava rovnic nekonečně mnoho řešení.

Příklad 22

Řešte soustavu rovnic v R:

$$2x^2 - 6y = -\frac{21}{2}$$

$$x - y = -1$$

Z druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do první rovnice: $x = y - 1$

$$2\cdot(y-1)^2 - 6y = -\frac{21}{2} \qquad / \cdot 2$$

$$4\cdot(y^2 - 2y + 1) - 12y = -21$$

$$4y^2 - 8y + 4 - 12y + 21 = 0$$

$$4y^2 - 20y + 25 = 0$$

$$D = (-20)^2 - 4\cdot 4\cdot 25 = 400 - 400 = 0$$

Diskriminant je roven nule, a proto má kvadratické rovnice jediný kořen:

$$y = \frac{-(-20)}{2 \cdot 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

Dosazením vypočtené hodnoty y do lineární rovnice vypočítáme hodnotu x.

$$x = y - 1$$

$$x = \frac{5}{2} - 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Řešením této soustavy rovnic je uspořádaná dvojice čísel $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Zkouška:

$$L_1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{2} = \frac{18}{4} - \frac{30}{2} = \frac{18-60}{4} = -\frac{42}{4} = -\frac{21}{2} = P_1$$

$$L_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1 = P_2$$

5.4 Úlohy na procvičení

5.1 Řešte dosazovací metodou soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) $$\begin{aligned} -x + y &= 4 \\ x + y &= 12 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ -3x + 6y &= -24 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} -x + 3y &= 6 \\ 6x + y &= 2 \end{aligned}$$

5.2 Řešte sčítací metodou soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) $$\begin{aligned} -2x + 4y &= 10 \\ 4x + y &= -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + 7y &= 34 \\ 5x + 4y &= 15 \end{aligned}$$

c) $\begin{aligned} x-14y&=20 \\ x-3y&=\frac{111}{5} \end{aligned}$

5.3 Řešte soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) $\begin{aligned} 3x-7y-1&=0 \\ 5x-4y-17&=0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x+2y&=10 \\ 0{,}1x+0{,}2y&=2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 0{,}4x-y&=0{,}5 \\ \frac{1}{5}x-\frac{1}{2}y&=\frac{1}{4} \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \frac{3y-2x}{5}-\frac{3x-5y}{3}&=1+x \\ \frac{4y-3x}{2}-\frac{3x-2y}{3}&=y+1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} -\frac{1}{3}&=\frac{3x-5}{2y-1} \\ 3&=\frac{5y+8}{4x-7} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} (5x+7)\cdot(2y-3)&=2\cdot(x+1)\cdot(5y-6) \\ (x+5)\cdot(y+3)&=(x+8)\cdot(y+1) \end{aligned}$

5.4 Řešte soustavy tří rovnic o třech neznámých a proveďte zkoušku:

a) $\begin{aligned} -4x-3y+3z&=1 \\ 5x+y+5z&=2 \\ -x-y+2z&=1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x+y-z&=3 \\ -x+2y+z&=12 \\ -3x+y-2z&=-4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x+y&=18 \\ x+z&=13 \\ y+z&=11 \end{aligned}$

d) $$\begin{aligned} x-y+z&=2\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}&=3\\ -x-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}&=-1 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 4x-2y+3z&=0\\ 7x-6y+z&=-5\\ -3x+4y+2z&=5 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 4x-2y+3z&=0\\ 7x-6y+z&=10\\ -3x+4y+2z&=5 \end{aligned}$$

5.5 Řešte soustavu lineární a kvadratické rovnice a proveďte zkoušku:

a) $$\begin{aligned} x^2-\frac{3}{2}y^2&=12\\ 2x-3y&=0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x^2-y^2-4x&=0\\ 2x+y-1&=0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 4x^2-9y^2&=0\\ 2x-3y&=0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 5\mathrm{y}^2-3xy+x&=0\\ x&=2y \end{aligned}$$

6 Řešení úloh na procvičení

1.1 Určete podmínky, za kterých mají smysl výrazy:

a) $z+1 \neq 0 \quad \Rightarrow z \neq -1$

b) $2x-4 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 2$

c) $y+3 > 0 \quad \Rightarrow x > -3$

d) $b-3 \geq 0 \quad \Rightarrow b \geq 3$

1.2 Nahraďte slovní popis matematickým zápisem:

a) $2 \cdot (a+b)$

b) $(a-b)^2$

c) $x^2 - y^2$

d) $\dfrac{m^2+n^2}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot (m^2+n^2)$

e) $|a|+|b|$

1.3 Zjednodušte výrazy:

a) $2-2m$

b) $a^2b^2 + a^2b - 2ab$

c) $11r$

d) $4a^2$

e) $2a^2 - 2a + c - 5$

f) $4x$

g) $6x+6y$

h) $25x - 8y - 10$

1.4 Vynásobte:

a) $-3a^2 + ab$

b) $2a^3b + 2ab^3$

c) $3z - 9$

d) $8ac - 12ab + 4c$

e) $6x^3 - 7x^2 + 12x - 5$

f) $-a^3 + a^2 + 3a - 2$

g) $2x^2 - 4x - 6$

h) $a^3 + b^3$

1.5 Umocněte podle vzorců:

a) $4 - 4a + a^2$

b) $25a^2 + 30ab + 9b^2$

c) $9x^2 - 6x + 1$

d) $16a^2 - 4b^2$

e) $8x^3 + 24x^2 + 24x + 8$

f) $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

1.6 Rozložte na součin pomocí vytýkání:

a) $2 \cdot (a + 2b)$

b) $a \cdot (2 - 3b)$

c) $5x \cdot (y^2 + 2x)$

d) $5x^2 \cdot (3x + 2y - 4y^3)$

e) $3ab \cdot (b^2 + 2b - 6)$

1.7 Postupným vytýkáním rozložte na součin:

a) $(5-a)\cdot(r+s)$

b) $(x^2-y)\cdot(a+b)$

c) $(x^2-y^2)\cdot(x+y)$

d) $(x^3+1)\cdot(x+1)$

e) $(x^2+y^2)\cdot(x-y)$

1.8 Pomocí vzorců rozložte na součin:

a) $(7-y)^2$

b) $(2a+1)^2$

c) $(-1)\cdot(x-3)^2$

d) $(y-4)\cdot(y+4)$

e) $(3b-2a)\cdot(3b+2a)$

f) $(x^2+b^3)^3$

g) $(4-r)^3$

h) $(3+2b)(9-6b+4b^2)$

i) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

1.9 Kombinované příklady na rozklad na součin.

a) $x\cdot(4x-1)\cdot(4x-1)$

b) $(a-b).(a+b).(a^2+b^2).(2a-1)$

c) $5\cdot(4-3a)\cdot(4-3a)$

d) $ab\cdot(4x+5y)\cdot(4x+5y)$

1.10 Určete, kdy má výraz smysl:

a) $x \neq 0$

b) $x \neq 2$

c) $x \neq -\dfrac{3}{2}$

d) $x \neq \pm 1$

1.11 Zkraťte lomené výrazy:

a) $\dfrac{5y}{2x}; x \neq 0; y \neq 0$

b) $\dfrac{s-4}{2s}; s \neq 0; s \neq -4$

c) $\dfrac{a-b}{a+b}; a \neq -b; c \neq 0$

d) $-\dfrac{a}{b}; b \neq 0; a \neq b$

1.12 Rozšiřte lomené výrazy tak, aby měli stejné jmenovatele:

a) $\dfrac{2x^2}{3xy}, \dfrac{3}{3xy}$

b) $\dfrac{2x-2}{x^2-1}, \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$

c) $\dfrac{3}{y-7}, \dfrac{-y}{y-7}$

d) $\dfrac{5b+5}{b^2+b}, \dfrac{2b}{b^2+b}$

1.13 Sečtěte nebo odečtěte lomené výrazy a určete podmínky, kdy výraz dává smysl:

a) $\dfrac{a^2+1}{2a}; a \neq 0$

b) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}; a \neq 0; b \neq 0$

c) $\frac{x^2+y^2+xy}{xy}; x \neq 0; y \neq 0$

d) $\frac{a+3}{2a^2-2a}; a \neq 0; a \neq 1$

1.14 Vynásobte lomené výrazy:

a) $\frac{3b}{2}; a \neq b; a \neq 0; b \neq 0$

b) $xy^2; x \neq 0$

c) $-1; x \neq \pm 2$

d) $= x^3; x \neq 0; x \neq 1$

e) $x; x \neq 0; y \neq 0; x \neq 5y$

1.15 Vydělte lomené výrazy:

a) $6b^3; b \neq 0$

b) $\frac{x^4}{y^3}; x \neq 0; y \neq 0$

c) $\frac{3r-6}{4r-2}; r \neq 0; r \neq \frac{1}{2}; r \neq 2$

d) $\frac{5}{9}; a \neq \pm b$

e) $\frac{2 \cdot (c+d)}{c}; c \neq 0; c \neq \pm d$

1.16 Upravte složené lomené výrazy:

a) $\frac{a}{b}; a \neq 0; b \neq 0$

b) $yx + y^2; x \neq 0; y \neq 0$

c) $\frac{2a}{b}; a \neq 0; b \neq 0$

d) $\frac{a+b}{a-b}; a \neq 0; a \neq b$

e) $\dfrac{3x+2y}{2x-3y}; x \neq \dfrac{3y}{2}$

2.1 Těleso bylo vrženo rychlostí 100 $m \cdot s^{-1}$.

2.2 Teplota $t_2 = \dfrac{Q + mct_1}{mc}$.

2.3 Poloměr kruhového průřezu $r = \sqrt{\dfrac{\rho l}{R\pi}}$.

2.4 Hmotnost $m = \dfrac{2E_\mathrm{k}}{v^2}$.

2.5 Těleso padalo z výšky 5 m.

2.6 Výška $v = \dfrac{3V}{\pi r^2}$.

2.7 Výška válce $v = \dfrac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$.

2.8 Kapacita C_2 = 9,8 F.

2.9 Velikost náboje $Q_1 = \dfrac{Fr^2}{kQ_2}$.

2.10 Velikost vnitřního odporu zdroje $R_\mathrm{i} = \dfrac{U_\mathrm{e} - U}{I}$.

3.1 Vyjádři v základních jednotkách:

a) 6 200 m; 26 m; 0,03 m; 1,15 m; 0,65 m; 0,002 m; 0,312 m; 0,005m;

b) 0,014568 m^3; 2,459 m^3; 0,002689258 m^3; 25,689235m^3; 0,356254189 m^3; 215,69378 m^3;

c) 0,005 kg; 0,006 235 kg; 3,568 241 kg; 5,687 kg; 1 250 kg; 256,8 kg; 2 500 kg; 356 000 kg;

d) 1500 s; 10 800 s; 2 483 s; 5 160 s; 9 327 s; 5 400 s; 86 400 s;

e) 2 400 $kg \cdot m^{-3}$; 14 500 $kg \cdot m^{-3}$; 800 $kg \cdot m^{-3}$; 1 610 $kg \cdot m^{-3}$; 870 $kg \cdot m^{-3}$; 7 700 $kg \cdot m^{-3}$;

f) 5 $m \cdot s^{-1}$; 16,66 $m \cdot s^{-1}$; 25 $m \cdot s^{-1}$; 33,33 $m \cdot s^{-1}$; 20 $m \cdot s^{-1}$; 8,33 $m \cdot s^{-1}$; 10,61 $m \cdot s^{-1}$;

g) 3 000 000 N; 124 000 N; 960 N; 2 500 J; 1 400 000 J; 5 300 000 000 J; 210 000 Pa; 23 500 W; 1 200 W;

h) 0,000 002 C; 0,000 3 C; 0,000 005 F; 0,000 000 000 02 F; 0,000 000 000 0097 F; 0,000 000 0016 F; 9 200 000 Ω; 3 500 Ω; 400 000 Ω; 0,03 A; 0,4 A.

3.2 Vyjádři v jednotkách se správnou předponou:

a) 36 km; 0,015 dm; 1 548 mm; 620 cm;

b) 1,65 cm^2; 658 dm^2; 2 560 000 mm^2;

c) 29 cm^3; 5,4 mm^3; 49 dm^3;

d) 94 kW; 368 GJ; 629 TW;

e) 46 μC; 18 mA; 67 pF.

4.1 Řešte rovnice v množině R a proveďte zkoušku:

a) $x = 0$

b) $x = -3$

c) $x = 1{,}8$

d) $x = 17$

4.2 Řešte rovnice v množině R, proveďte zkoušku a stanovte podmínky řešitelnosti:

a) $x = \frac{2}{3}$

b) $x = 0$

c) $x = 9$

d) $x = 1$

4.3 Řešte rovnice v množině R:

a) $P = \{4\}$

b) $P = \{\}$

c) $P = \{1\}$

d) $P = \langle 2, \infty \rangle$

4.4 Řešte rovnice a proveďte diskuzi vzhledem k parametru:

a) Diskuze:	1. $p = 2$	$0 = 0$	$\Rightarrow x \in R$
	2. $p \in$ R - {2}		$\Rightarrow x = p + 2$
b) Diskuze:	1. $p = 0{,}5$	$0 = 0$	$\Rightarrow x \in R$
	2. $p \in$ R - {0,5}		$\Rightarrow x = -2$
c) Diskuze:	1. $p = 0{,}25$	$0 = 0$	$\Rightarrow x \in R$
	2. $p \in$ R - {0,25}		$\Rightarrow x = -1$
d) Diskuze:	1. $t = 0$		rovnice nemá smysl
	2. $t = 2$	$0 = 4$	rovnice nemá řešení
	3. $t \in$ R - {0,2}		$\Rightarrow x = \dfrac{2+t}{2-t}$

4.5 Řešte rovnice v množině R:

a) $x_1 = 0;\ x_2 = 1$

b) $x = \pm\sqrt{2}$

c) $x_1 = 6$; $x_2 = -2$

d) $x_1 = 9$; $x_2 = 4$

5.1 Řešte dosazovací metodou soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [4; 8].

b) Dospěli jsme k nepravdivému výroku, soustava nemá řešení.

c) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [0; 2].

5.2 Řešte sčítací metodou soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [-2; 1,5].

b) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [-1; 5].

c) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $\left[\frac{114}{5}; \frac{1}{5}\right]$.

5.3 Řešte soustavy rovnic a proveďte zkoušku:

a) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [5; 2].

b) Dospěli jsme k nepravdivému výroku, daná soustava nemá řešení.

c) Dospěli jsme k pravdivému výroku, daná soustav má nekonečně mnoho řešení.

d) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [2; 3].

e) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [2; -1].

f) Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [1; 3].

5.4 Řešte soustavy tří rovnic o třech neznámých a proveďte zkoušku:

a) Řešením soustavy je uspořádaná trojice [-1; 2; 1].

b) Řešením soustavy je uspořádaná trojice [1; 5; 3].

c) Řešením soustavy je uspořádaná trojice [10; 8; 3].

d) Řešením soustavy je uspořádaná trojice [-2; 2; 6].

e) Dospěli jsme k pravdivému výroku, daná soustav má nekonečně mnoho řešení.

f) Dospěli jsme k nepravdivému výroku, daná soustav nemá řešení.

5.5 Řešte soustavu lineární a kvadratické rovnice a proveďte zkoušku:

a) Řešením soustavy jsou dvě uspořádané dvojice $[6;4],[-6;-4]$.

b) Dospěli jsme k nepravdivému výroku a proto daná soustava rovnic nemá řešení.

c) Dospěli jsme k pravdivému výroku a proto daná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

d) Řešením soustavy jsou dvě uspořádané dvojice $[0;0],[4;2]$.

Použitá literatura

[1] SLOUKA, Radim. Algebra : pro žáky 5.-9. tříd ZŠ, studenty víceletých gymnázií a třídy s rozšířenou výukou matematiky. 1. vydání. Olomouc : FIN, spol. s r. o., 1994. 231 s. ISBN 80-85572-62-1.

[2] CALDA, Emil. Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU, 1. díl. 1. vydání. Praha : Prometheus, 2003. 239 s. ISBN 80-7196-253-8.

[3] CALDA, Emil. Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU, 2.díl. 1. vydání. Praha : Prometheus, 2003. 201 s. ISBN 80-7196-260-0.

[4] BUŠEK, Ivan; BOČEK, Leo; CALDA, Emil. Matematika pro gymnázia : Základní poznatky z matematiky. 2.vydání. Praha : Prometheus, 1995. 165 s. ISBN 80-85849-34-8.

[5] CALDA, Emil; PETRÁNEK, Oldřich; ŘEPOVÁ, Jana. Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 1. část. 2. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1986. 195 s. 14-040-86.

[6] HALOUZKA, Alois. Písemky z matematiky SŠ. 1. vydání. Praha : NAKLADATELSTVÍ SCIENTIA, spol. s r. o., 2005. 205 s. ISBN 80-86960-00-5.

[7] SLOUKA, Radim, et al. Sbírka příkladů z matematiky : pro žáky 5.-9. tříd ZŠ, studenty víceletých gymnázií a třídy s rozšířenou výukou matematiky. 1. vydání. Olomouc : FIN, spol. s r. o., 1993. 223 s. ISBN 80-85572-55-9.

[8] BOHUNĚK, Jiří. Sbírka úloh z fyziky pro ZŠ 1. díl. 2. vydání. Praha : Prometheus, 1996. 126 s. ISBN 80-85849-06-2.

[9] JANEČEK, František. Sbírka úloh z matematiky pro střední školy : výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy. 4. vydání. Praha : Prometheus, 2004. 194 s. ISBN 80-7196-076-4.

[10] Testy z matematiky 2003. 1. vydání. Brno : DIDAKTIS, 2002. 144 s. ISBN 80-86285-51-0.

[11] Testy z matematiky 2004. 1. vydání. Brno : DIDAKTIS, 2003. 144 s. ISBN 80-86285-75-8.